

Enseignement à distance

Méthodes de calcul et statistiques

Unité d'enseignement LM 100

Le cours

Marie-Christine Angonin

2005-2006

Table des matières

1	Les vecteurs	7
1.1	Repérage de l'espace	7
1.1.1	<i>Orientation d'un plan et d'un trièdre.</i>	7
1.1.2	<i>Repères</i>	8
1.2	Lois de composition et produits	9
1.2.1	<i>Addition vectorielle et multiplication par un scalaire.</i>	9
1.2.2	<i>Produit scalaire de deux vecteurs</i>	9
1.2.3	<i>Produit vectoriel</i>	10
1.2.4	<i>Quelques remarques</i>	11
2	Trigonométrie et nombres complexes	13
2.1	Bases de la trigonométrie	13
2.1.1	<i>Le cercle trigonométrique</i>	13
2.1.2	<i>Propriétés des sinus et cosinus</i>	14
2.1.3	<i>Les relations trigonométriques dans un triangle</i>	14
2.1.4	<i>Relations entre fonctions trigonométriques d'angles différents</i>	15
2.2	Nombres complexes	17
2.2.1	<i>Définition</i>	17
2.2.2	<i>Représentation géométrique d'un nombre complexe</i>	18
2.2.3	<i>Représentation géométrique d'un nombre complexe en coordonnées polaires : module et argument</i>	19
2.2.4	<i>Exponentielle complexe, formule de Moivre</i>	20
2.2.5	<i>Propriétés de l'exponentielle complexe</i>	21
2.3	Utilisation des nombres complexes	22
2.3.1	<i>Racines d'une équation du second degré</i>	22
2.3.2	<i>Racines n-ième de l'unité</i>	24
2.3.3	<i>Racines d'une équation du n-ième degré</i>	24
3	Les matrices et applications	25
3.1	Définitions	25
3.1.1	<i>Différentes matrices</i>	25
3.1.2	<i>Déterminant d'une matrice</i>	27
3.2	Calcul matriciel	31
3.2.1	<i>Addition de 2 matrices</i>	31
3.2.2	<i>Multiplication par un scalaire</i>	31
3.2.3	<i>Produit de matrices</i>	32
3.2.4	<i>Matrice inverse d'une matrice carrée</i>	34
3.3	Interprétation géométrique de matrices	35
3.3.1	<i>Représentation de vecteurs sous forme de matrices</i>	36

3.3.2	<i>Homothétie</i>	36
3.3.3	<i>Rotation et symétrie</i>	36
3.4	Application des matrices à la résolution de systèmes d'équations linéaires	38
3.4.1	<i>Définition</i>	38
3.4.2	<i>Résolution par échelonnement</i>	39
3.4.3	<i>Résolution d'un système régulier à l'aide de la matrice inverse</i> . .	41
4	Les fonctions	45
4.1	Définitions	45
4.2	Limites	46
4.3	Dérivées	47
4.3.1	<i>Généralités</i>	47
4.3.2	<i>Calcul de dérivées.</i>	49
4.4	Etude d'une fonction	50
4.4.1	<i>Propriétés remarquables.</i>	50
4.4.2	<i>Etude d'une fonction.</i>	51
4.4.3	<i>Fonctions remarquables.</i>	54
4.5	Développement de Taylor	56
4.5.1	<i>Développement de Taylor.</i>	56
4.5.2	<i>Cas des polynômes.</i>	57
4.5.3	<i>Développement de MacLaurin des fonctions usuelles.</i>	57
4.5.4	<i>Validité du développement de McLaurin.</i>	58
4.5.5	<i>Exemples.</i>	59
4.6	Différentielle d'une fonction d'une seule variable	60
4.6.1	<i>Définition et notations.</i>	60
4.6.2	<i>Représentation graphique.</i>	60
4.6.3	<i>Dérivée d'une fonction de fonction.</i>	61
4.6.4	<i>Petites variations.</i>	61
5	Primitives et Intégrales	63
5.1	Définitions et exemples	63
5.2	Intégrale définie	64
5.3	Méthodes d'intégration	67
5.3.1	<i>Les tables et les ordinateurs.</i>	67
5.3.2	<i>La simplification du problème.</i>	67
5.3.3	<i>L'intégration par partie.</i>	68
5.3.4	<i>Le changement de variable.</i>	68
6	Les équations différentielles	71
6.1	Equations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants	71
6.1.1	<i>Résolution de l'équation sans second membre</i>	71
6.1.2	<i>Résolution de l'équation avec second membre</i>	72
6.2	Equations différentielles du deuxième ordre, linéaires, à coefficients constants	73
6.2.1	<i>Résolution de l'équation sans second membre</i>	73
6.2.2	<i>Résolution de l'équation avec second membre</i>	74

7 Fonctions de plusieurs variables	77
7.1 Dérivée	77
7.1.1 Dérivée partielles du premier ordre.	77
7.1.2 Dérivées partielles d'ordre supérieurs à 1.	78
7.1.3 Généralisation et dimensions physiques.	79
7.2 Différentielle	80
7.3 Expressions remarquables	81
7.4 Calcul d'incertitudes	82
7.4.1 Rappels	82
7.4.2 Calcul d'incertitudes	83
7.5 Différentielles et dérivées de vecteurs	84
7.5.1 Définitions.	84
7.5.2 Propriétés.	85
7.6 Champs de vecteurs	85
7.6.1 Circulation d'un vecteur.	86
7.6.2 Gradient d'une fonction.	87
8 Probabilités et statistiques	89
8.1 Notion d'expérience, d'événement et conséquences	89
8.1.1 Qu'est-ce qu'une expérience ?	89
8.1.2 Opérations sur les événements	90
8.2 Probabilités	90
8.2.1 Définition	90
8.2.2 Probabilités conditionnelles et combinées	92
8.2.3 Rappels d'analyse combinatoire	94
8.3 Variables aléatoires discrètes	95
8.3.1 Définitions	95
8.3.2 Paramètres caractéristiques	96
8.3.3 Principales lois des variables discrètes	98
8.4 Variables aléatoires continues	99
8.4.1 Définitions	99
8.4.2 Paramètres caractéristiques	100
8.4.3 Principales lois de probabilités	101
8.5 Statistique, échantillonnage et estimation	104
8.5.1 Définitions	104
8.5.2 Caractéristiques d'un échantillon statistique	105
8.5.3 Estimateur	106
8.5.4 Intervalle de confiance	106



Préface

Le but du cours LM100 est d'introduire et d'approfondir certaines notions mathématiques utilisées dans les cours de physique, biologie ou chimie. Les connaissances de mathématiques correspondantes seront supposées assimilées pour l'examen.

Dans le présent fascicule nous procédons à de nombreux rappels qui constituent près de la moitié des développements qui suivent. Il est donc fortement conseillé de se reporter aux cours de mathématiques du lycée.

Le programme spécifique à la Licence 1^{ère} année concerne principalement.

- Le **développement de Taylor** ainsi que **les fonctions de plusieurs variables**
- **Les différentielles**
- **Les intégrales** et les méthodes d'intégration
- Le produit vectoriel, les différentielles et **les dérivées de vecteurs**, les champs de vecteurs
- **Les matrices** et leurs applications.
- **Les équations différentielles**
- Les **lois de probabilités** et les notions **d'échantillonnage et d'estimation**

Il n'est pas nécessaire d'étudier ces outils mathématiques en préalable si les bases, supposées acquises pour le baccalauréat scientifique, sont effectivement assimilées. Dans ce cas, en effet, on peut étudier les points nouveaux, seulement lorsque le besoin s'en fait sentir dans une autre matière.

Symboles de comparaison

- Nous utiliserons parfois le symbole " $:=$ " au lieu de " $=$ ".
- Par exemple, définissant l'accélération nous écrivons " $\gamma_x := d^2x/dt^2$ ". Aucune loi n'est exprimée par cette égalité, elle ne représente pas une équation ni un résultat. C'est seulement **une définition**.
Par contre pour présenter la loi fondamentale de la dynamique (la seconde loi de Newton) nous écrivons " $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ".
Ainsi $x^3 - 7 := 0$ doit être considéré comme la relation de définition de x , tandis que $x^3 - 7 = 0$ est une équation à résoudre dont la solution devra être notée x_0 par exemple ("Soit x_0 la solution de l'équation $x^3 - 7 = 0$ " s'écrit " $x_0^3 - 7 := 0$ ").
Lors de démonstrations, nous ferons également usage de " $:=$ " pour souligner que telle égalité est bien établie et qu'elle ne fait pas l'objet de la démonstration en cours (par opposition aux égalités notées " $=$ ").
Nous utiliserons le symbole " $:=$ " dans un souci de concision ou de clarification ; nous n'en ferons pas un usage systématique.
- Nous utiliserons le symbole " \propto " pour signifier **"équivalent à..."** ou **"varie comme..."** ou encore **"proportionnel à..."**.
– Considérons par exemple la fonction $F = x^n(1 + \varepsilon(x))$ où $\varepsilon(x)$ décroît vers 0 lorsque x tend vers ∞ . Dans ces conditions nous poserons $F \propto x^n$ (on dit " F équivalent à x^n "). Cela ne signifie pas que $F - x^n \rightarrow 0$. Pour $n = 2$ et $\varepsilon(x) = 1/x$ il vient $F = x^2 + x$ et par conséquent $F - x^2 = x \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, cependant, dans ces conditions $F \propto x^2$.
Une grandeur physique P , s'exprime en fonction des variables ρ, T , etc. On écrit $P = F(\rho, T, \dots)$. Supposons que l'on ait $P = \rho^\gamma f(T, \dots)$ où f est indépendant de ρ . On écrira $P \propto \rho^\gamma$ (on dit " P varie comme ρ^γ "). Bien que le symbole " \propto " puisse prendre des sens différents, aucune ambiguïté n'est à redouter dans un contexte donné.
- Très souvent, nous ne sommes pas intéressés par la valeur précise d'une quantité physique mais par son **"ordre de grandeur"**.
– Ainsi le rayon terrestre, R_\oplus est de l'ordre de 10 000 km (plus précisément 6 400 km). Nous écrivons $R_\oplus \sim 10\,000$ km. Remarquer que le diamètre terrestre est du même ordre. Une goutte d'eau dont le diamètre est $d \sim 1$ mm est 10 ordres de grandeur plus petite que la Terre $((1\text{ mm})/(10\,000\text{ km}) = 10^{-10})$.

Nous distinguerons les relations " \simeq " (à peu près égale à) et " \sim " (de l'ordre de) : par exemple $1254 \simeq 1,3 \cdot 10^3 \sim 10^3$.

- Les symboles " \gtrsim " et " \lesssim " seront employés pour signifier respectivement "**supérieur à un terme de l'ordre de...**" et "**inférieur à un terme de l'ordre de...**" tandis que " \gg " et " \ll " signifient "**beaucoup plus grand que...**" et "**beaucoup plus petit que...**".

Seules des grandeurs de même nature peuvent être comparées entre elles : une longueur avec une autre longueur, une durée avec une autre durée et **jamais** une durée avec une longueur. Les grandeurs de même nature ont mêmes unités.

Chapitre 1

LES VECTEURS

Le but de ce chapitre est de compléter les notions introduites au lycée plus que d'en rappeler la teneur. Ainsi nous supposons que les bases de la théorie des vecteurs (ceux de l'espace à trois dimensions de la géométrie euclidienne) sont connues : égalité, dépendance linéaire, orthogonalité, norme, projection, etc. Nous reviendrons cependant sur certains points, principalement pour attirer l'attention sur leur importance et susciter les révisions nécessaires le cas échéant. Il peut être utile de lire les rappels sur les bases de la trigonométrie (notamment la définition du cercle trigonométrique, des sinus et cosinus) avant de commencer ce chapitre.

1.1 Repérage de l'espace

1.1.1 Orientation d'un plan et d'un trièdre.

Etant donné un plan, P , on choisit un vecteur, \vec{u} , orthogonal à ce plan. Deux choix sont possibles. Le vecteur \vec{u} étant choisi, on dispose alors **la main droite** comme il est indiqué sur la figure 1.1. L'orientation positive des angles du plan s'en déduit.

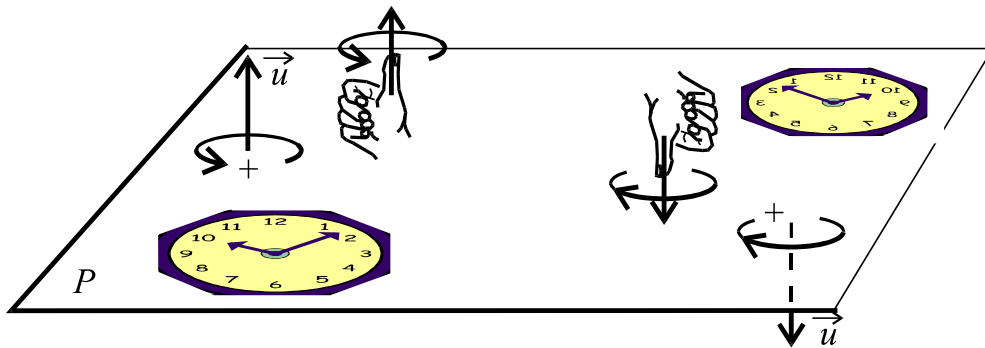


fig. 1.1 : Les deux orientations possibles d'un plan.

Considérons maintenant trois vecteurs non coplanaires, \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 de même origine. Le plan formé par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est orienté de telle sorte que le sinus de l'angle (\vec{v}_1, \vec{v}_2) soit positif. On en déduit le vecteur unitaire, \vec{u} , qui oriente le plan.

Si le vecteur \vec{v}_3 est dans le même demi espace que \vec{u} , le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est un **"trièdre direct"** dans le cas contraire le trièdre est **"rétrograde"**.

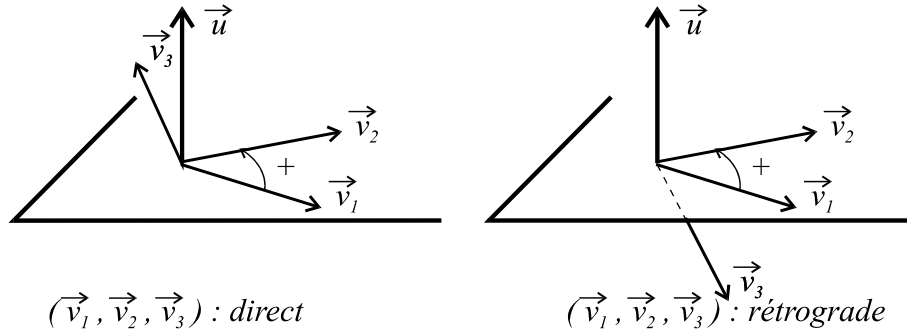


fig. 1.2 : Trièdres direct et rétrograde.

Attention! L'ordre des vecteurs est important. Si le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est direct il en est de même de $(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$ mais $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2)$ est alors rétrograde ainsi que $(-\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, par exemple.

1.1.2 Repères

Pour repérer la position des points de l'espace, on se donne un trièdre orthonormé direct, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et un point O , choisi comme origine. Le point M est repéré par les composantes (x, y, z) du vecteur $\vec{OM} : \vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. Les trois valeurs x , y et z sont les **"coordonnées cartésiennes"** du point M associées au repère donné (l'abscisse est x , l'ordonnée est y et la cote est z).

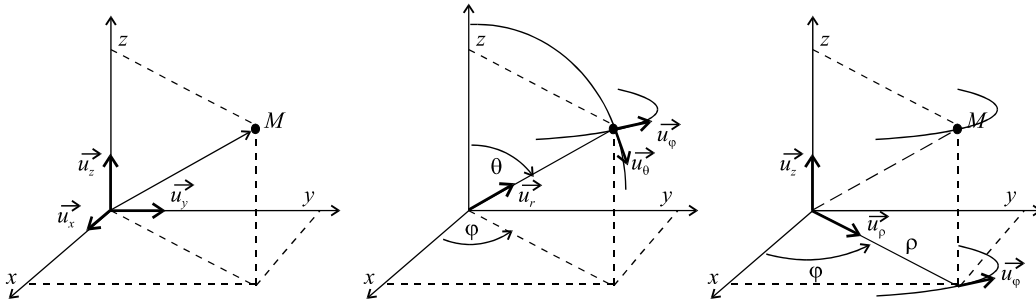


fig. 1.3 : Coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques.

Les **"coordonnées sphériques"** sont r, θ et φ .

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta & \text{avec} \\
 r &\geq 0, & 0 \leq \theta &\leq \pi, & 0 \leq \varphi &< 2\pi
 \end{aligned}$$

M étant repéré par ses coordonnées sphériques, on définit le repère "local" $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui est un repère orthonormé direct (cf. fig. 1.3)

On utilise aussi les "coordonnées cylindriques" ρ, φ, z où le trièdre local $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Remarquons que les vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ de la représentation sphérique et les vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ de la représentation cylindrique dépendent du point M considéré* tandis que les trois vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de la représentation cartésienne ne dépendent pas du point, M .

Dans la suite du cours nous utiliserons essentiellement les coordonnées cartésiennes (d'un repère orthonormé direct).

1.2 Lois de composition et produits

1.2.1 Addition vectorielle et multiplication par un scalaire.

L'addition vectorielle est une opération qui à deux vecteurs associe un troisième vecteur.

Soient $\vec{V} = X \vec{u}_x + Y \vec{u}_y + Z \vec{u}_z$ et $\vec{V}' = X' \vec{u}_x + Y' \vec{u}_y + Z' \vec{u}_z$. La somme de ces deux vecteurs est notée $\vec{V} + \vec{V}'$; c'est, par définition, le vecteur \vec{S} tel que

$$\vec{S} := \vec{V} + \vec{V}' = (X + X') \vec{u}_x + (Y + Y') \vec{u}_y + (Z + Z') \vec{u}_z$$

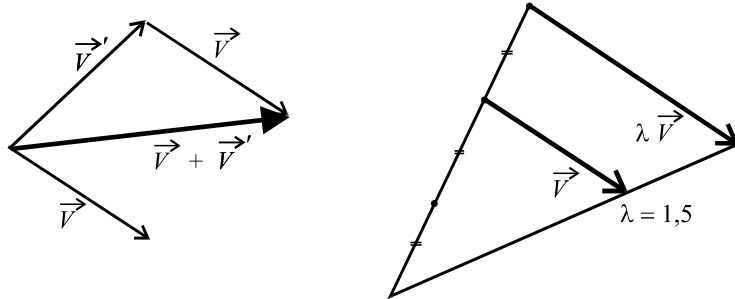


fig. 1.4

Attention! Dans l'addition vectorielle ce ne sont pas les normes (les longueurs) des vecteurs qui s'additionnent mais les composantes suivant chaque axe.

Le nombre λ étant donné, on définit le produit d'un vecteur par λ , et on note ce produit $\lambda \vec{V}$:

$$\lambda \vec{V} = (\lambda X) \vec{u}_x + (\lambda Y) \vec{u}_y + (\lambda Z) \vec{u}_z$$

1.2.2 Produit scalaire de deux vecteurs

Etant donnés deux vecteurs, \vec{V} et \vec{V}' leur produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ est **un nombre** tel que

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \cos \theta$$

*Pour cette raison les repères introduit en représentation sphérique et cylindrique ont été qualifié de "local".

où $\|\vec{V}\|$ et $\|\vec{V}'\|$ sont les normes des vecteurs tandis que θ est l'angle des deux vecteurs.

Introduisons \vec{U} , projection orthogonale de \vec{V} sur la direction de \vec{V}' et \vec{U}' , projection orthogonale de \vec{V}' sur la direction de \vec{V} (fig. 1.5). Il vient

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \vec{U} \cdot \vec{V}' = \vec{V} \cdot \vec{U}'$$

Le produit scalaire ne dépend pas de l'ordre des vecteurs : il ne dépend pas du signe de θ mais de celui de $\cos \theta$.

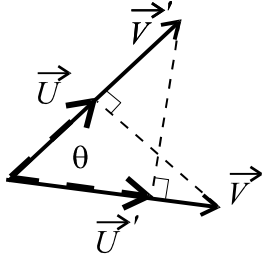


fig. 1.5 : $\vec{V} \cdot \vec{V}' > 0$.

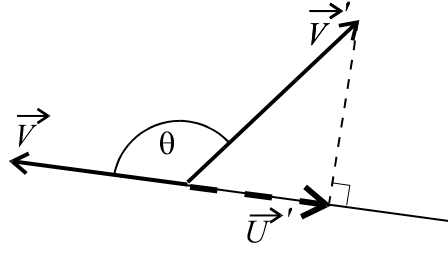


fig. 1.6 : $\vec{V} \cdot \vec{V}' < 0$

Le produit scalaire s'exprime en fonctions des composantes de \vec{V} et \vec{V}' dans une base orthonormée sous la forme

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = X X' + Y Y' + Z Z' = \vec{V}' \cdot \vec{V}$$

Rappelons également la propriété suivante

$$\vec{V} \cdot (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2) = \vec{V} \cdot \vec{V}_1 + a \vec{V} \cdot \vec{V}_2$$

où a est un nombre.

1.2.3 Produit vectoriel

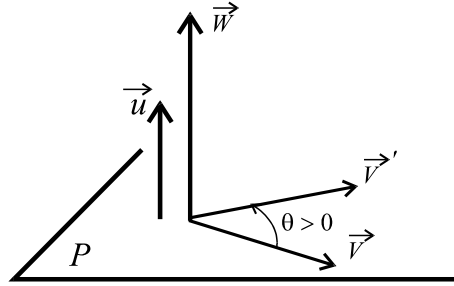
Etant donnés deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' , le produit vectoriel de ces vecteurs est **un vecteur** \vec{W} noté $\vec{V} \wedge \vec{V}'$, défini de la façon suivante :

1. Si \vec{V} et \vec{V}' sont parallèles, $\vec{W} = \vec{0}$.
2. Si \vec{V} et \vec{V}' ne sont pas parallèles, ils définissent un plan P (cf. fig. 1.7). Nous choisissons un vecteur unitaire \vec{u} orthogonal à ce plan. Ce vecteur définit une orientation des angles dans P . Soit θ l'angle (orienté) (\vec{V}, \vec{V}') . Par définition on pose

$$\vec{W} := \vec{V} \wedge \vec{V}' = \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \sin \theta \cdot \vec{u}$$

Remarquons qu'à la limite $\theta \rightarrow 0$ on retrouve le cas 1. ci-dessus.

Deux orientations sont possibles pour le vecteur \vec{u} . Si on change le signe de \vec{u} , on change l'orientation du plan P et donc le signe de θ . Le produit $\sin \theta \cdot \vec{u}$ reste inchangé ainsi que le produit vectoriel. La définition de $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ ne dépend donc pas de la convention concernant l'orientation du plan P .

fig. 1.7 : $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$

On vérifie que le **trièdre** $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{W})$ est **direct**.

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

$\vec{V} \wedge \vec{V}' = -\vec{V}' \wedge \vec{V}$
$\vec{V} \wedge (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2) = \vec{V} \wedge \vec{V}_1 + a \vec{V} \wedge \vec{V}_2$

où a est un nombre.

$\vec{V} \wedge \vec{V}' = (Y Z' - Z Y') \vec{u}_x + (Z X' - X Z') \vec{u}_y + (X Y' - Y X') \vec{u}_z$

La première propriété se démontre aisément. Si on change l'ordre \vec{V}, \vec{V}' en \vec{V}', \vec{V} on change θ en $-\theta$, ce qui change le signe du produit vectoriel.

Nous ne démontrerons pas la seconde propriété (voir la bibliographie).

La troisième propriété se démontre en remarquant que le repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct, ce qui implique

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x, \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

En développant le produit $(X \vec{u}_x + Y \vec{u}_y + Z \vec{u}_z) \wedge (X' \vec{u}_x + Y' \vec{u}_y + Z' \vec{u}_z)$ on obtient le résultat cherché.

1.2.4 Quelques remarques

- L'orthogonalité des vecteurs \vec{V} et \vec{V}' se traduit par la nullité de leur produit scalaire : $\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$.

- La projection orthogonale du vecteur \vec{V} sur un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u} s'écrit

$$\text{Proj}_{/\vec{u}} [\vec{V}] = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

La mesure algébrique de la projection orthogonale de \vec{V} sur l'axe orienté par \vec{u} est donc $(\vec{V} \cdot \vec{u})$.

- Lorsque deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' sont proportionnels ($\vec{V} = a \vec{V}'$) on trouve $\vec{V} \wedge \vec{V}' = \vec{0}$. Cette propriété permet de reconnaître le parallélisme de deux vecteurs.

- L'aire A du triangle construit sur \vec{V} et \vec{V}' comme côtés s'exprime sous la forme $A = \frac{1}{2} \|\vec{V} \wedge \vec{V}'\|$.
- Le volume V , du tétraèdre construit sur \vec{V} , \vec{V}' et \vec{V}'' comme côtés s'écrit $V = \frac{1}{6} \left| \vec{V} \cdot (\vec{V}' \wedge \vec{V}'') \right|$.
- Le nombre $\vec{V} \cdot (\vec{V}' \wedge \vec{V}'')$ est appelé "produit mixte" de \vec{V} , \vec{V}' et \vec{V}'' pris dans cet ordre. Le produit mixte est positif si le trièdre $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ est direct ; il est nul lorsque les vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires).

Chapitre 2

TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES

En premier lieu, ce chapitre consiste en une présentation des bases de la trigonométrie. Les formules habituelles sont notamment données, il convient de les connaître ou de savoir les retrouver rapidement (nous en reparlerons). La deuxième partie porte sur les nombres complexes : définitions, propriétés. Différentes utilisations de ces nombres sont présentées à la suite ou dans des chapitres ultérieurs.

2.1 Bases de la trigonométrie

2.1.1 Le cercle trigonométrique

Le "**cercle trigonométrique**" est un cercle unitaire (de rayon 1) orienté suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre pour la mesure des angles. Pour mémoire, on rappelle que les angles sont exprimés dans diverses unités : degré, radian, etc. ($180^\circ = \pi \text{ rad}$). Ces unités n'ont pas de dimension. Il est commode d'exprimer les angles en radian car alors la valeur obtenue est la mesure de la corde du cercle trigonométrique correspondant à l'angle. S'il est en radian, l'angle devient une variable mathématique à part entière qui permet notamment de faire des développements limités que nous étudierons plus tard. Nous considérons donc pour la suite que tous les angles sont exprimés en radian.

La figure 2.1 résume les différentes définitions des fonctions trigonométriques de bases : sinus, cosinus, tangente, cotangente. La variation de chacune de ces fonctions est décrite dans le chapitre sur les fonctions.

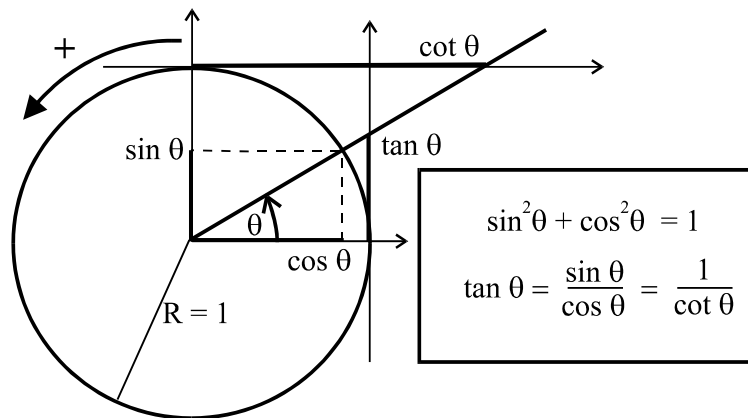


fig. 2.1 : Cercle trigonométrique.

2.1.2 Propriétés des sinus et cosinus

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des sinus et cosinus de quelques angles particuliers. Ces valeurs doivent être connues.

$\alpha =$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	en radian
$\sin \alpha =$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$	moyen mnémotechnique
$\sin \alpha =$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	
$\cos \alpha =$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	la ligne précédente de droite à gauche.

Ci-dessous sont données les relations entre différents angles, montrant des propriétés de symétrie des fonctions sinus et cosinus. Ces relations doivent être connues ou facilement retrouvées (en faisant un schéma avec un cercle trigonométrique par exemple).

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$	$\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\cot(\pi + x) = \cot x$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$	$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	$\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$	$\tan(\pi/2 + x) = -\cot x$
$\cot(\pi/2 - x) = \tan x$	$\cot(\pi/2 + x) = -\tan x$

2.1.3 Les relations trigonométriques dans un triangle

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment les fonctions trigonométriques peuvent intervenir dans les différentes sortes de coordonnées (en particulier cylindriques et sphériques) de vecteurs.

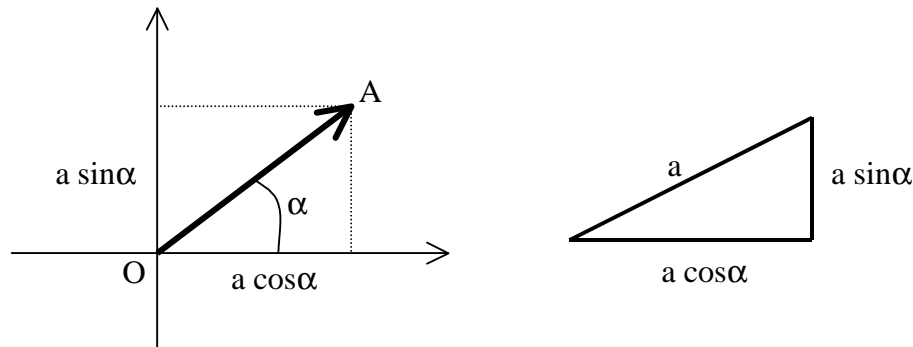


fig. 2.2 : Projection d'un vecteur et relations dans un triangle

Dans la figure 2.2, le vecteur \overrightarrow{OA} a pour module $\|\overrightarrow{OA}\| = a$. Ses coordonnées cylindriques sont $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$. Ces coordonnées cylindriques correspondent à la projection orthogonale de $\|\overrightarrow{OA}\|$ sur les axes Ox et Oy . Ainsi, comme cela est suggéré dans la figure 2.2, nous avons construit un triangle rectangle ayant trois côtés de longueur : a , $a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$. Cette figure nous permet de retrouver certaines formules concernant les fonctions trigonométriques.

$$\begin{aligned} \text{cosinus d'un angle} &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \\ \text{sinus d'un angle} &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \\ \text{tangente d'un angle} &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore nous dit que le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des côtés d'un triangle rectangle, c'est équivalent à

$$a^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha \iff \boxed{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1}$$

2.1.4 Relations entre fonctions trigonométriques d'angles différents

Ces relations se déduisent les unes des autres. Nous partirons d'une relation que nous démontrerons. Puis, la méthode pour trouver les autres formules sera ensuite indiquée succinctement.

La première relation que nous regardons peut être démontrée de diverses façons, mais la plus directe consiste en l'utilisation de la formule du produit scalaire décrite au chapitre précédent.

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} formant un angle a et b avec l'axe Ox (figure 2.3).

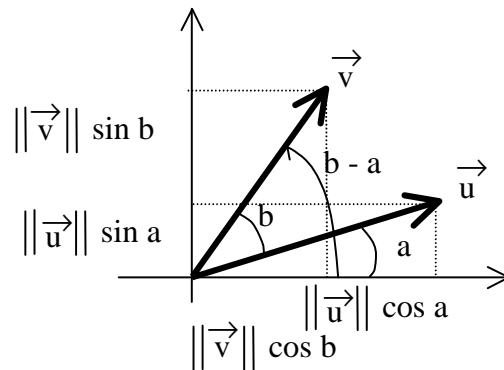


fig. 2.3

Il est possible d'écrire leur produit scalaire de deux façons

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(b - a) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(a - b)$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = \|\vec{u}\| \times \cos a \times \|\vec{v}\| \times \cos b + \|\vec{u}\| \times \sin a \times \|\vec{v}\| \times \sin b$$

Ces deux calculs sont égaux, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(a-b) &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos a \times \cos b + \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin a \times \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b \end{aligned}$$

Les autres relations du tableau se déduisent en remplaçant b par $-b$ ou par a , puis en se servant de la formule

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Les relations sur la tangente découlent de sa définition.

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$	$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Les relations suivantes sont des combinaisons linéaires des précédentes.

Posons $\tan(x/2) := t$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
--------------------------------	-----------------------------	-----------------------------

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$

Faut-il apprendre par coeur ces formules ? Ceux qui ont une excellente mémoire les retiendront sans peine, d'autres qui calculent rapidement retiendront seulement certaines de ces formules, ils en déduiront les autres si c'est nécessaire.

Un étudiant qui "voit" le cercle trigonométrique les yeux fermés ne retiendra pas par coeur la valeur des cosinus et sinus des angles remarquables, ni même certaines relation comme $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ car un coup d'oeil sur son cercle trigonométrique lui donnera la réponse. Ainsi, chacun doit décider ce qu'il souhaite mémoriser en fonction de ses propres préférences.

2.2 Nombres complexes

2.2.1 Définition

Les nombres complexes ont été introduits en mathématiques pour résoudre certaines équations qui n'ont pas de solution dans l'ensemble \mathbb{R} des réels, comme par exemple :

$$x^2 = -1$$

Les mathématiciens ont ainsi été amenés à définir le "**nombre imaginaire**" i comme une des solutions de cette équation :

$$i^2 := -1$$

Cette définition serait restée anecdotique si elle n'avait pas aboutit à une propriété tout à fait intéressante : l'utilisation des nombres complexes permet de résoudre toute équation polynomiale, quel que soit son degré. On aurait pu imaginer qu'il fallait des nombres de plus en plus compliqués pour déterminer les racines d'équations polynomiales en fonction de la valeur du degré. Mais non, les nombres complexes suffisent pour ce travail !

La première preuve de ce résultat a été proposé par le célèbre mathématicien Gauss dans sa thèse de doctorat en 1799. Nous nous contenterons donc d'admettre cette propriété...

Un "**nombre complexe**" z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

a est la "**partie réelle**" du nombre complexe, on écrit $a = \operatorname{Re}(z)$. b est la "**partie imaginaire**" du nombre complexe, on écrit $b = \operatorname{Im}(z)$.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit "**imaginaire pur**".

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un "**réel**".

On définit le "**nombre complexe conjugué**" \bar{z} , comme étant le nombre complexe ayant la même partie réelle que z et l'opposé de sa partie imaginaire

$$\bar{z} := a - ib$$

Remarque : le conjugué d'un nombre réel est égal à ce nombre. Le conjugué d'un nombre imaginaire pur est l'opposé de ce nombre.

Soient deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = x + iy$

– Leur *addition* est définie par :

$$z + z' = (a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y)$$

– Leur *multiplication* est définie par :

$$z \times z' = (a + ib) \times (x + iy) = ax + iay + ibx + i^2by = (ax - by) + i(ay + bx)$$

En particulier, en utilisant cette définition :

$$i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \times 0 - 1 \times 1) + i(0 \times 1 + 1 \times 0) = -1$$

2.2.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe $z = a + ib$ est donc défini par deux nombres réels a et b . Ainsi, si l'on fait abstraction du i , on peut dire qu'il y a une correspondance entre un nombre complexe et un couple de nombres :

$$a + ib \rightarrow (a, b)$$

Le nombre imaginaire i devient, par cette correspondance, le couple $(0,1)$.

Cette identification entre un nombre complexe et le couple de nombres réels correspondants permet une représentation géométrique des nombres complexes dans un plan (\mathbb{R}^2), appelé le "**plan complexe**". Le couple de nombres réels devient alors les coordonnées d'un vecteur représentant le nombre complexe dans le plan orthonormé considéré. L'axe des abscisses est appelé "**axe des réels**" et l'axe des ordonnées, "**axe des imaginaires purs**". Parfois, on associe à un nombre complexe le point de coordonnées (a, b) .

Remarque : la représentation géométrique du conjugué d'un nombre complexe est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du vecteur (ou du point) représentant le nombre complexe.

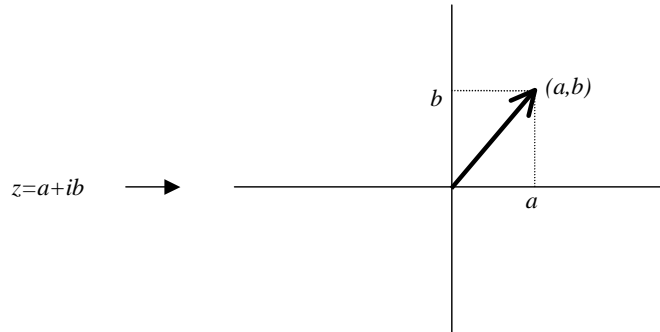


fig. 2.4 : Le plan complexe

La représentation par un vecteur a toutefois l'avantage de permettre d'avoir une analogie simple pour l'addition. En effet, la définition de l'addition de deux nombres complexes correspond exactement à l'addition des deux vecteurs dont les coordonnées coïncident avec les deux couples de nombres correspondants.

$$(a, b) + (x, y) \rightarrow (a + x, b + y)$$

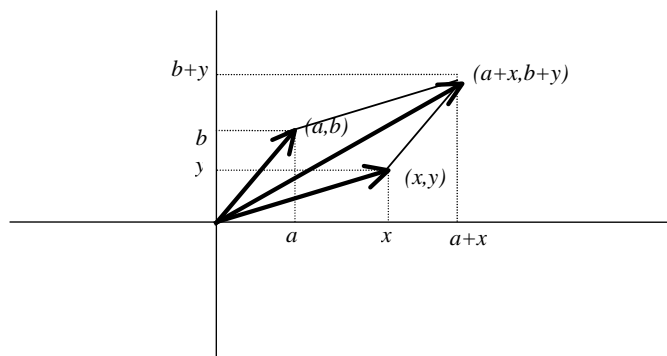


fig. 2.5 : Addition de deux nombres complexes

La multiplication est plus difficile à décrire dans ce système de coordonnées. Il faut alors se mettre dans des coordonnées polaires.

2.2.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe en coordonnées polaires : module et argument

- A toutes coordonnées (a, b) , il est possible de faire correspondre un rayon r ($\in \mathbb{R}^+$) et un angle α ($\in [0, 2\pi[$) tels que :

$$(a, b) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ est alors le module du vecteur associé à (a, b) et α l'angle que forme le vecteur avec l'axe des abscisses.

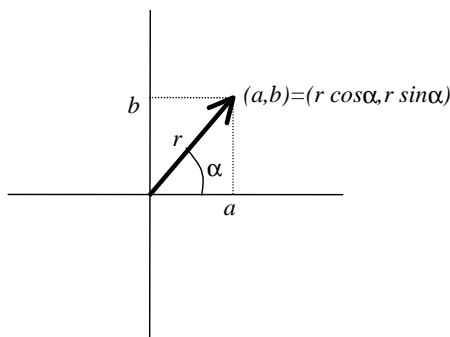


fig. 2.6 : Coordonnées polaires

- Le nombre complexe associé peut alors s'écrire de deux façons différentes

$$z = a + ib = r \cos \alpha + i r \sin \alpha$$

On définit r comme étant le "**module**" de z , il sera noté $|z| = r$, et α comme étant l'"**argument**" de z .

Le module d'un nombre complexe est unique et appartient à \mathbb{R}^+ . Par contre, la valeur de l'argument peut dépendre de l'intervalle de définition que l'on choisit. Ainsi, nous avons choisi $\alpha \in [0, 2\pi[$, mais il est tout à fait possible de choisir un autre intervalle de définition, par exemple : $\alpha \in]-\pi, +\pi]$, du moment que ce dernier permette de décrire un cercle trigonométrique complet.

Nous avons, par ailleurs, la relation

$$z \times \bar{z} = (a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2 + iab - iab = a^2 + b^2 = |z|^2$$

– Revenons à la multiplication de deux nombres complexes.

On définit de la même façon les coordonnées polaires s et β du vecteur complexe (x, y)

$$(x, y) = (s \cos \beta, s \sin \beta)$$

Si l'on reprend la définition de la multiplication de deux nombres complexes, on obtient, d'après les formules trigonométriques vues en début de chapitre

$$(a, b) \times (x, y) = (rs (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta), rs (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) = (rs \cos(\alpha + \beta), rs \sin(\alpha + \beta))$$

La multiplication de deux nombres complexes donne un vecteur complexe dont le module est la multiplication des modules des deux vecteurs complexes et l'angle d'orientation est la somme des deux angles. Cette propriété nous amène à la définition des exponentielles complexes.

2.2.4 Exponentielle complexe, formule de Moivre

A partir des calculs précédents, nous pouvons nous arrêter sur le cas remarquable du produit de deux nombres complexes de module unité (égal à 1)

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

La fonction complexe $\alpha \rightarrow f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ a donc la propriété suivante

$$f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha + \beta)$$

Si cette fonction avait comme variable uniquement un réel, nous aurions dit que cette propriété était caractéristique d'une exponentielle. De fait, cette fonction complexe possède un certain nombre de propriétés communes avec l'exponentielle réelle. Ces propriétés nous montrent qu'il est possible de définir une **"fonction exponentielle complexe"**

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Cette définition constitue ce que l'on appelle la formule de Moivre.

Remarque (hors programme) : Cette définition est en fait une égalité démontrable. Lorsque nous verrons les développements limités dans le chapitre sur les fonctions, nous saurons qu'il est possible d'écrire pour l'exponentielle réelle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Il se trouve, de plus, que cette expression n'est pas seulement vraie pour x proche de 0, mais pour tout x de \mathbb{R} . Si, par analogie, on remplace x par ix , on obtient (en tenant compte du fait que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc.) :

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

où l'on retrouve l'expression des développements limités des fonctions cosinus et sinus soit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

2.2.5 Propriétés de l'exponentielle complexe

- Le module d'une exponentielle complexe est égal à 1

Démonstration : soit un nombre complexe $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Le module de ce nombre est

$$|z| = |e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

- Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme :

$$z = r \cos \alpha + ir \sin \alpha = r e^{i\alpha}$$

où r est le module de z et α son argument.

- Si nous posons $\theta = 2\pi$, nous obtenons

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

Remarque : Cette relation est certainement l'une des plus spectaculaires des mathématiques : un nombre transcendant puissance un autre nombre transcendant multiplié par un nombre imaginaire donne l'unité!

- A partir des deux équations (en se servant des propriétés de parité des sinus et cosinus)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Il est possible de faire la demi-somme et la demi-différence. On obtient alors

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- Lorsque nous multiplions un nombre complexe par $e^{i\theta}$, nous obtenons le nombre complexe dont la représentation dans le plan complexe est le vecteur déduit du vecteur initial par la rotation d'angle autour de l'origine avec l'orientation positive habituelle : dans le sens des aiguilles d'une montre.

Démonstration : soit le nombre complexe $z = r e^{i\alpha}$

Si nous le multiplions par $e^{i\theta}$, nous obtenons

$$e^{i\theta} \times z = e^{i\theta} \times r e^{i\alpha} = r e^{i(\alpha+\theta)}$$

Le nombre complexe $e^{i\theta} \times z$ possède le même module que z et son argument est $\alpha + \theta$. Sa représentation dans le plan complexe est donc

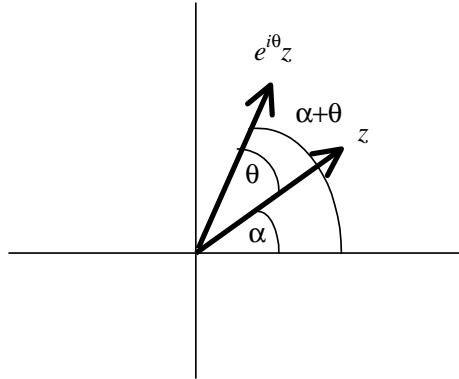


fig. 2.7 : Représentation dans le plan complexe

Nous voyons que le vecteur associé à $e^{i\theta} \times z$ est la rotation du vecteur associé à z d'un angle θ .

- Le nombre complexe $e^{i\omega t}$, où t désigne le temps, peut se représenter par un vecteur unitaire qui tourne dans le sens positif à la vitesse angulaire ω autour de l'origine.
- Nous pouvons écrire maintenant l'exponentielle d'un nombre complexe quelconque.

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \times e^{ib} = e^a \times (\cos b + i \sin b)$$

On montre que cette écriture est parfaitement légitime. De plus, comme $e^a \in \mathbb{R}^+$, nous pouvons déduire de l'expression précédente que e^a n'est autre que le module de ce nombre complexe.

2.3 Utilisation des nombres complexes

Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, les nombres complexes sont apparus pour résoudre des équations, en particulier les équations du second degré. Nous allons donc voir comment les utiliser concrètement pour résoudre certains types d'équations. Les nombres complexes ne représentent donc pas uniquement une belle construction mathématique, ils ont de nombreuses autres applications. Nous en aborderons quelques-unes lorsque nous décrirons les techniques de résolution des équations différentielles.

2.3.1 Racines d'une équation du second degré

- Soit une équation du second degré dont les coefficients a , b et c sont réels

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme (en se servant des identités remarquables)

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

L'équation de départ est donc équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Dans le cas où tous les coefficients de l'équation sont réels et que l'on cherche des solutions où x est aussi réel, la démarche pour résoudre le problème est donc la démarche classique (qui est à connaître) :

- 1- Nous calculons le discriminant : $\Delta := b^2 - 4ac$
- 2- Nous déterminons le signe du discriminant.
- 3- Si le discriminant est positif, il y a deux solutions ou racines :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si le discriminant est nul, la solution est unique (racine double) : $x = \frac{-b}{2a}$

Si le discriminant est négatif, il n'y a pas de racine.

- Nous pouvons généraliser cette méthode au cas où la solution de l'équation est complexe. Pour ne pas confondre avec le cas précédent, nous allons écrire l'équation avec une nouvelle inconnue

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ et, maintenant, } z \in \mathbb{C}$$

De la même façon que pour l'équation précédente, nous pouvons dire que résoudre cette équation est équivalent à résoudre l'équation

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}$$

La méthode est, au départ, la même que précédemment, la nouveauté réside dans la troisième étape :

- 1- Nous calculons le discriminant : $\Delta := b^2 - 4ac$
- 2- Nous déterminons le signe du discriminant.
- 3- Si le discriminant est positif, il y a deux racines :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si le discriminant est nul, la solution est unique (racine double) : $z = \frac{-b}{2a}$

Si le discriminant est négatif, il y a **deux racines** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Une équation du second degré à coefficients réels a ainsi **toujours** des racines complexes.

Remarque : Pour retrouver le résultat dans le cas où le discriminant est négatif, on peut utiliser le moyen mnémotechnique suivant : si Δ est négatif alors $-\Delta$ est positif. Or $\Delta = (-1) \times (-\Delta) = i^2 \times (\sqrt{-\Delta})^2$. Il suffit alors d'utiliser les formules correspondant au cas où le discriminant est positif en remplaçant $\sqrt{\Delta}$ par $i\sqrt{-\Delta}$.

2.3.2 Racines n-ième de l'unité

Chercher la racine n-ième de l'unité consiste à chercher les solutions complexes de l'équation suivante

$$z^n = 1$$

Supposons donc que $z \in \mathbb{C}$ est solution de cette équation. Il a un module $r \in \mathbb{R}^+$ et un argument α (ici, nous ne fixons pas d'intervalle de définition de l'argument volontairement car nous allons chercher toutes les solutions possibles).

$$z = r e^{i\alpha}$$

Cela implique la relation

$$z^n = r^n e^{in\alpha} = 1$$

Prenons le module des nombres de part et d'autre de la relation

$$|z^n| = |r^n e^{in\alpha}| = |r^n| |e^{in\alpha}| = |r^n| = r^n = 1$$

Si n est non nul, cela implique que $r = 1$. **Les racines n-ième de l'unité ont un module égal à 1.** Leur représentation dans le plan complexe est donc située sur le cercle trigonométrique. Nous avons donc finalement

$$z^n = e^{in\alpha} = 1 \implies \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) = 1 \implies \cos(n\alpha) = 1 \text{ et } \sin(n\alpha) = 0$$

L'argument α d'une racine n-ième de l'unité s'écrit

$$\alpha = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Au total, les racines n-ième de l'unité s'écrivent

$$z = \exp\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Remarque : si z est une racine n-ième de l'unité alors son conjugué est aussi une racine n-ième de l'unité. Les représentations dans le plan complexe des racines n-ième de l'unité sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2.3.3 Racines d'une équation du n-ième degré

Les résultats obtenus pour une équation du second degré sont, en fait, très généraux. On peut en effet montrer -mais la démonstration ne sera pas faite ici- le théorème suivant (Cauchy, 1799) :

Soit l'équation du n-ième degré à coefficients complexes ($\forall i \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}$; de plus, $a_n \neq 0$) :

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Cette équation possède toujours n racines complexes : z_1, \dots, z_n . Ces racines ne sont pas toujours toutes distinctes : il est possible que certaines racines soient doubles, triples, ou plus. Par ailleurs, il est toujours possible d'écrire :

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Chapitre 3

LES MATRICES ET APPLICATIONS

Comme les nombres complexes, les matrices sont un outil mathématique utile pour résoudre certaines sortes de problèmes. Il convient donc de les définir soigneusement et de décrire leurs propriétés essentielles. Elles ont un rôle dans les transformations géométriques que nous présenterons sous forme de quelques cas particuliers. Le but ultime de ce chapitre est de savoir résoudre les systèmes d'équations à deux ou trois inconnues. Les exemples de situations où ses systèmes apparaissent sont multiples : les études des cartes, des populations, des statistiques, etc. mettent en oeuvre plusieurs variables qui dépendent les unes des autres. Nous proposons ici une méthode générale de résolution de ces systèmes qui pourra s'appliquer en toutes circonstances.

3.1 Définitions

3.1.1 Différentes matrices

- Une "**matrice**" A peut être définie comme un tableau de nombres réels ou complexes (m et n sont des entiers naturels)

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} (avec $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$) sont appelés les "**coefficients**" de la matrice. Suivant le cas, ils peuvent être réels ou complexes.

Nous pouvons remarquer que l'ordre des indices est très important : il désigne de façon non-ambiguë l'emplacement du coefficient dans le tableau de la matrice.

Les coefficients a_{kk} dont l'indice est deux fois le même nombre forment la "**diagonale principale**" de la matrice.

- L'ensemble des coefficients $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ correspondent à une "**ligne**" de la matrice. Nous désignerons une ligne de la matrice de la façon suivante

$$(L_i) := (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in})$$

De même, l'ensemble des coefficients $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ correspondent à une "**colonne**" de la matrice. Nous désignerons une colonne de la matrice de la façon suivante

$$(C_j) := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

La matrice A possède donc n colonnes et m lignes, on l'appelle une matrice $m \times n$.

Exemples :

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 .

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 .

Remarque : Les (L_i) et les (C_j) sont elles-mêmes des cas particuliers de matrices :

- Les (L_i) font partie des matrices $1 \times n$, que l'on appelle matrices-lignes.
- Les (C_i) font partie des matrices $m \times 1$, que l'on appelle matrices-colonnes.

Les coefficients de la matrice A pour la ligne i et la colonne j seront notés $(A)_{ij}$ (dans le cas présent, $(A)_{ij} = a_{ij}$.)

Remarque : Une matrice 1×1 n'a qu'un seul coefficient. Par usage, on ne parle alors plus de matrice, mais du nombre ou "**scalaire**" correspondant.

- Nous allons définir deux types de matrices associées à A : la matrice transposée et la matrice conjuguée.

On appelle "**matrice transposée**" de A , tA , la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t a_{11} & {}^t a_{12} & \dots & {}^t a_{1m} \\ {}^t a_{21} & {}^t a_{22} & \dots & {}^t a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t a_{n1} & {}^t a_{n2} & \dots & {}^t a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

soit : $({}^tA)_{ij} = {}^t a_{ij} = a_{ji} = (A)_{ji}$

Remarque : si la matrice A est une matrice $m \times n$, sa transposée tA est une matrice $n \times m$.

On appelle "**matrice conjuguée**" de A , A^* , la matrice obtenue en prenant le conjugué de chaque coefficient.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

soit : $(A^*)_{ij} = a_{ij}^* = \bar{a}_{ij}$

Remarque : si la matrice A est une matrice $m \times n$, sa conjuguée A^* est une matrice $m \times n$.

- Examinons quelques matrices particulières.

Matrice carrée : matrice dont le nombre n de lignes est égal au nombre de colonnes. On dit que la matrice est d'"**ordre**" n .

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2+i & -3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Matrice triangulaire supérieure (inférieure) : matrice carrée dont les éléments sous (sur) la diagonale principale sont nuls.

Exemple : $B = \begin{pmatrix} 2+i & -3 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure.

$C = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

$D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice triangulaire.

Matrice diagonale : matrice carrée dont tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale principale sont nuls.

Exemple : $E = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale, mais $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

n'est pas une matrice diagonale.

Matrice unité ou identité d'ordre n : matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. À l'usage, cette matrice est parfois représentée par un I ou I_n comme identité, ou par un 1.

$$I = I_n = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice nulle : matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. À l'usage, cette matrice est représentée par un simple 0.

Matrice échelonnée : matrice dont le nombre de 0 consécutifs à gauche augmente de ligne en ligne. Une matrice triangulaire supérieure est un cas particulier de matrice échelonnée.

3.1.2 Déterminant d'une matrice

Cas d'une matrice 2×2

Soit A une matrice carrée 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le "**déterminant**" de la matrice A est le nombre suivant (les différentes notations peuvent être utilisées)

$$\text{dét } A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Exemple :

$$\text{Calculons le déterminant de } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dét } A = |A| = 1 \times 0 - i \times (-i) = -1$$

Cas d'une matrice 3×3

Soit B une matrice carrée 3×3

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Le "**déterminant**" de la matrice B est noté

$$\text{dét } B = |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Son calcul est un peu plus compliqué que dans le cas précédent, aussi nous allons voir différentes méthodes pour l'obtenir. Chacun choisira la méthode qui lui paraît la plus pratique à l'usage.

– 1^{ère} méthode : **Développement à partir d'une ligne ou d'une colonne.**

Cette méthode est très générale, elle est valide quel que soit l'ordre n de la matrice.

Il faut tout d'abord se rapporter à une quantité que nous connaissons déjà : un déterminant de matrice 2×2 . C'est pourquoi nous avons besoin de la définition d'un mineur. On appelle "**mineur**" M_{ij} de l'élément b_{ij} de B le déterminant de la matrice issue de la matrice B à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j .

Exemple : Pour la matrice B , $M_{23} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$

Pour obtenir ce résultat, il faut prendre le déterminant de la matrice B à laquelle on a enlevé la deuxième ligne et la troisième colonne.

Le déterminant de la matrice B se calcule en le développant à partir d'une ligne ou d'une colonne.

Si l'on développe à partir d'une ligne i

$$\text{dét } B = |B| = b_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + b_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + b_{in} (-1)^{i+n} M_{in}$$

Si l'on développe à partir d'une colonne j

$$\text{dét } B = |B| = b_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j} + b_{2j} (-1)^{2+j} M_{2j} + \dots + b_{nj} (-1)^{n+j} M_{nj}$$

Le terme $(-1)^{i+j} M_{ij}$ est appelé le "**cofacteur**" de l'élément b_{ij}

$$\text{cof } b_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Dans le cas d'une matrice 3×3 , nous avons

Si l'on développe à partir d'une ligne i

$$\text{dét } B = |B| = b_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + b_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + b_{i3} (-1)^{i+3} M_{i3}$$

Si l'on développe à partir d'une colonne j

$$\text{dét } B = |B| = b_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j} + b_{2j} (-1)^{2+j} M_{2j} + b_{3j} (-1)^{3+j} M_{3j}$$

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Développons à partir de la première ligne

$$\begin{aligned} \det C &= |C| = 1 \times M_{11} - 2 \times M_{12} + 3 \times M_{13} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \det C = |C| &= 1 \times (5 \times 9 - 6 \times 8) - 2 \times (4 \times 9 - 6 \times 7) + 3 \times (4 \times 8 - 5 \times 7) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Développons à partir de la première colonne

$$\begin{aligned} \det C &= |C| = 1 \times M_{11} - 4 \times M_{21} + 7 \times M_{31} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \det C = |C| &= 1 \times (5 \times 9 - 6 \times 8) - 4 \times (2 \times 9 - 3 \times 8) + 7 \times (2 \times 6 - 3 \times 5) \\ &= -3 + 24 - 21 = 0 \end{aligned}$$

– 2^{ème} méthode : **La méthode de Sarrus.**

Attention : cette méthode n'est valide que pour une matrice 3×3 .

Soit B une matrice carrée 3×3

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Cette méthode consiste à faire le tableau suivant où l'on reproduit les deux premières colonnes après avoir écrit une première fois les éléments de la matrice

$$\oplus \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice B est l'addition des produits des termes situés sur les diagonales principales (\searrow) à laquelle on soustrait les produits des termes situés sur les autres diagonales du tableau (\nearrow).

$$\ominus \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Au final, nous avons donc l'expression du déterminant de la matrice B

$$\begin{aligned} \det B = |B| &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{b_{11} \times b_{22} \times b_{33} + b_{12} \times b_{23} \times b_{31} + b_{13} \times b_{21} \times b_{32}}_{\substack{\text{diagonales} \searrow \text{ du tableau } \oplus}} \\ &\quad - \underbrace{b_{31} \times b_{22} \times b_{13} - b_{32} \times b_{23} \times b_{11} - b_{33} \times b_{21} \times b_{12}}_{\substack{\text{diagonales} \nearrow \text{ du tableau } \ominus}} \end{aligned}$$

Exemple : Calculons le déterminant de la matrice C par la méthode de Sarrus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ecrivons les tableaux correspondants

$$\begin{aligned} \oplus \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ 4 & & 5 & 6 & 4 & 5 \\ & & \searrow & \searrow & \searrow & \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \ominus \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ 4 & & 5 & 6 & 4 & 5 \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'expression du déterminant est donc

$$\begin{aligned} \det C = |C| &= 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 7 \times 5 \times 3 - 8 \times 6 \times 1 - 9 \times 4 \times 2 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons le même résultat qu'en utilisant les développements à partir d'une ligne ou d'une colonne.

Propriétés des déterminants

Soit une matrice carrée A d'ordre n .

- $|{}^t A| = |A|$
- S'il y a une colonne ou une ligne constituée uniquement de 0, $|A| = 0$
- Si A a 2 (ou plus) lignes ou 2 (ou plus) colonnes identiques, $|A| = 0$
- Si l'on multiplie une ligne ou une colonne de A par un nombre quelconque k , le déterminant de la matrice obtenue vaut $k|A|$
- Si l'on ajoute à une ligne (ou colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes), le déterminant de la matrice résultante est le même.

Remarque : De la dernière propriété associée à la deuxième, nous déduisons que si une ligne (ou une colonne) est égale à la combinaison linéaire d'autres lignes (ou colonnes), le déterminant de la matrice est nul.

3.2 Calcul matriciel

Nous nous replaçons, à présent, dans le cas général de matrices quelconques (pas seulement carrées). Il est possible de définir l'addition et la multiplication de matrices. Mais ces opérations n'ont pas tout à fait les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication de nombres. Il convient donc d'apprendre soigneusement, en plus de la méthode de calcul, ce que l'on a le droit de faire et ce qu'il ne faut pas faire avec ces opérations. La pratique de quelques exercices peut être très utile pour assimiler ces règles.

3.2.1 Addition de 2 matrices

Remarque importante :

Nous ne pouvons additionner **que** des matrices de **même** taille.

Définition

Soient deux matrices A et B , toutes deux sont des matrices $m \times n$. Les coefficients de A sont notés a_{ij} et les coefficients de B sont notés b_{ij} .

On définit la matrice **addition** de A et B de la façon suivante

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \implies \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- La matrice addition de deux matrices $m \times n$ donne une matrice $m \times n$.
- L'ordre ne compte pas dans l'addition de matrices :
 $A + B = B + A \quad \Rightarrow \quad$ L'addition est *commutative*.
- $(A + B) + C = A + (B + C) \quad \Rightarrow \quad$ L'addition est *associative*.
- $0 + A = A + 0 = A$ On dit que 0 est *élément neutre* pour l'addition.

3.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition

Soit une matrice A , supposons qu'elle soit une matrice $m \times n$. Les coefficients de A sont notés a_{ij} .

On définit la multiplication de A par le scalaire (nombre quelconque) k de la façon suivante

$$(k \times A)_{ij} = (kA)_{ij} = ka_{ij}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } k = -2 + i$$

$$\implies \quad kA = (-2 + i)A = \begin{pmatrix} -2 + i & -4 + 2i \\ -6 + 3i & -8 + 4i \end{pmatrix}$$

Propriétés

– Quand on multiplie une matrice $m \times n$ par un scalaire, on obtient une matrice $m \times n$.

– Cas particuliers

Si $k = 1$, $1A = A$

Si $k = 0$, $0A = 0$

Si $k = -1$, $(-1)A = -A$

On peut remarquer que $A + (-A) = 0$.

Cela signifie que $-A$ est l'opposé de A pour l'addition.

– $k \times (A + B) = kA + kB$

$(k + k') \times A = kA + k'A$

Ces deux dernières propriétés montrent la *distributivité* de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de deux matrices et de deux scalaires.

3.2.3 Produit de matrices

Remarque importante : Le produit de matrices n'existe que dans des cas particuliers. De plus, **l'ordre de multiplication compte**. Il faut que **le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième matrice**.

Définition

Soient deux matrices A et B : A est une matrice $m \times n$ et B est une matrice $n \times p$. Les coefficients de A sont notés a_{ij} et les coefficients de B sont notés b_{ij} .

On définit la matrice **produit** de A et B de la façon suivante

$$(A \times B)_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj}$$

Concrètement, pour trouver l'élément ij du produit AB , il faut prendre la ligne i de A et la colonne j de B et multiplier le premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne, puis lui additionner le deuxième coefficient de la ligne multiplié par le deuxième coefficient de la colonne, et ainsi de suite. On voit ici qu'il est impératif que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B sinon ce calcul ne pourrait se faire correctement jusqu'au bout. Un moyen mnémotechnique peut consister à présenter le produit sous forme du tableau proposé dans l'exemple : on voit qu'il faut, pour chaque coefficient du produit, associer une ligne de A avec une colonne de B .

Exemple :

	$\times \nearrow$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = B$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times 3 \\ 3 \times 0 + 4 \times 2 & 3 \times 1 + 4 \times 3 \end{pmatrix} = A \times B = AB$

Propriétés

- La matrice produit d'une matrice $m \times n$ par une matrice $n \times p$ est une matrice $m \times p$.

Exemple : Le produit d'une matrice 3×1 par une matrice 1×3 donne une matrice 3×3 .

	$\times \nearrow$	$(+1 \quad +2 \quad +3) = B$
$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ +2 & +4 & +6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ 0 \times 1 & 0 \times 2 & 0 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{pmatrix} = A \times B = AB$

Le produit d'une matrice 1×3 par une matrice 3×1 donne une matrice 1×1 , c'est-à-dire un scalaire.

	$\times \nearrow$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ +2 \end{pmatrix} = A$
$B = (+1 \quad +2 \quad +3)$		$(4) = 4 = (-2 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3) = B \times A = BA$

- Le produit d'une matrice n'est *pas commutatif*. L'exemple précédent en est un exemple flagrant : la matrice AB n'a même pas la même taille que la matrice BA ! De plus, comme le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice dans le produit, dans le cas général de matrices quelconques, **si AB existe alors BA n'existe pas forcément**. Il faut être extrêmement vigilant sur ce point.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Il est possible de calculer AB

	$\times \nearrow$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = B$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 4 \\ -1 \times 3 + 2 \times 4 \end{pmatrix} = AB$

Par contre, il est impossible de calculer BA !

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad \Rightarrow \quad$ La multiplication est *associative*.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C \quad \Rightarrow \quad$ La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

$k \times (A \times B) = kA \times B = A \times kB \quad \Rightarrow \quad$ La multiplication de deux matrices est *associative* par rapport à la multiplication par un scalaire.

- Si I est la matrice identité : $I \times A = A \times I = A \quad \Rightarrow \quad$ La matrice identité est *élément neutre* pour la multiplication.

3.2.4 Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

On dit que A est **inversible** s'il est possible de trouver une matrice A^{-1} telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, I étant la matrice identité.

La matrice A^{-1} est alors appelée "**matrice inverse**" de A .

On démontre -mais nous ne le ferons pas ici- qu'une matrice A est inversible, si et seulement si son déterminant $|A| \neq 0$.

Remarque : La matrice inverse de AB est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration : $ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$

De même , $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$

Calcul de la matrice inverse

- Cas général (définition d'une comatrice)

Si la matrice carrée A d'ordre n est inversible (c'est-à-dire, $|A| \neq 0$) alors sa matrice inverse A^{-1} s'écrit

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{com}A}{|A|}$$

${}^t \text{com}A$ est la transposée de la comatrice de A .

La "**comatrice**" de A , noté $\text{com}A$ ou A_C , est la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs des coefficients correspondants de A :

$$\text{com}A = A_C = \begin{pmatrix} \text{cofa}_{11} & \dots & \text{cofa}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cofa}_{n1} & \dots & \text{cofa}_{nn} \end{pmatrix}$$

- Cas d'une matrice 2×2

Nous allons effectuer le calcul de la matrice inverse d'une matrice 2×2 quelconque, puis nous vérifierons que la matrice inverse obtenue correspond bien à sa définition.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Calculons les cofacteurs (il faut, dans chaque cas, enlever les coefficients de la ligne et de la colonne concernées) :

$$\begin{aligned} \text{cofa}_{11} &= (-1)^{1+1}a_{22} = a_{22} \\ \text{cofa}_{12} &= (-1)^{1+2}a_{21} = -a_{21} \\ \text{cofa}_{21} &= (-1)^{2+1}a_{12} = -a_{12} \\ \text{cofa}_{22} &= (-1)^{2+2}a_{11} = a_{11} \end{aligned}$$

La comatrice s'écrit donc

$$\text{com}A = A_C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Sa transposée (symétrique par rapport à la diagonale principale) donne :

$${}^t \text{com} A = {}^t A_C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A s'écrit, par ailleurs

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Au final, la matrice inverse de A s'écrit

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{com} A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}}$$

Vérification :

Nous voulons vérifier que la matrice inverse satisfait bien à la relation

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= A^{-1}A = I \\ AA^{-1} &= \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} & a_{12} \times a_{22} - a_{12} \times a_{22} \\ a_{11} \times a_{21} - a_{11} \times a_{21} & a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} \end{pmatrix}}{a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} & a_{12} \times a_{11} - a_{12} \times a_{11} \\ a_{22} \times a_{21} - a_{22} \times a_{21} & a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} \end{pmatrix}}{a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

3.3 Interprétation géométrique de matrices

Les matrices sont un outil mathématique qui peut servir pour décrire des transformations géométriques. Il faut pour cela définir un repère dans un plan (représentation en 2 dimensions, que nous appellerons 2D) ou dans l'espace (représentation en 3 dimensions ou 3D). La matrice va donc constituer ce que l'on appelle une forme bilinéaire, c'est-à-dire qu'elle va représenter une application linéaire des coordonnées d'un vecteur, soit encore un système d'équations dont les variables sont les coordonnées d'un vecteur. Pour être plus rigoureux, il faudrait développer un formalisme assez lourd dont nous n'avons pas l'utilité. Nous nous contenterons donc de quelques exemples très précis qui ont leur utilité pour décrire des mouvements dans un plan (par exemple : la tectonique des plaques) ou dans l'espace (par exemple : mouvement des bras et des jambes).

3.3.1 Représentation de vecteurs sous forme de matrices

Soit \vec{V} un vecteur

On associe à ce vecteur une matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées cartésiennes du vecteur dans le repère orthonormé choisi.

$$\begin{aligned} \text{Cas 2D : } \vec{V} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{Cas 3D : } \vec{V} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Attention : Du fait de l'habitude de noter les coordonnées d'un vecteur ou d'un point par un couple (x,y) ou un triplet (x,y,z) -ce que l'on trouve parfois dans les livres-, la tendance naturelle est souvent d'associer un vecteur à une matrice ligne. Cela représente une erreur grave. Dans le cadre de ce polycopié, les matrices lignes n'ont aucune contrepartie géométrique et ne doivent pas apparaître dans les calculs.

Il ne faut donc pas confondre le couple (x, y) et la matrice ligne $(x \ y)$,
ni le triplet (x,y,z) avec la matrice $(x \ y \ z)$

3.3.2 Homothétie

L'homothétie est une transformation géométrique qui affecte de la même façon chaque coordonnée d'un vecteur.

On définit donc l'homothétie de rapport k comme étant l'application qui, à un vecteur \vec{V} associe le vecteur $k\vec{V}$.

Sous la forme de matrice, cela revient à une multiplication de la matrice colonne représentant le vecteur par le scalaire k .

$$\begin{aligned} \text{Cas 2D : } \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{Homothétie de rapport } k} & k\vec{V} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix} \\ \text{Cas 3D : } \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{Homothétie de rapport } k} & k\vec{V} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \\ k \times z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une homothétie est l'équivalent d'un effet de "zoom" grossissant si le rapport $k > 1$.

Une homothétie est l'équivalent d'un effet de "zoom" inversé si le rapport $k < 1$.

Une homothétie de rapport $k = 1$ est l'identité.

3.3.3 Rotation et symétrie

Rotation

Soit \vec{V} un vecteur

Une rotation d'un angle θ de ce vecteur est représentée par la multiplication de ce vecteur par une matrice.

– La matrice représentant la rotation d'un angle θ dans le cas 2D s'écrit

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exemple : Supposons que $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i}$. Il s'agit en fait du vecteur unitaire suivant l'axe des x .

La représentation matricielle de la rotation du vecteur \vec{V} d'un angle θ va consister à multiplier le vecteur par la matrice \mathcal{R}_θ . Effectuons cette multiplication

$$\vec{V}_\theta = \mathcal{R}_\theta \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\times \nearrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{V}$
$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \vec{V}_\theta$

Nous obtenons $\vec{V}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont bien celles d'un vecteur unitaire ayant un angle θ par rapport à l'axe des x et donc le résultat d'une rotation d'un angle θ du vecteur \vec{V} .

– Cas 3D

La matrice rotation d'un angle θ autour de l'axe des x s'écrit :

$$\mathcal{R}_\theta^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La matrice rotation d'un angle θ autour de l'axe des y s'écrit :

$$\mathcal{R}_\theta^y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La matrice rotation d'un angle θ autour de l'axe des z s'écrit :

$$\mathcal{R}_\theta^z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symétrie

Soit \vec{V} un vecteur 2D

La transformation donnant le symétrique de ce vecteur par rapport à un axe est représentée par la multiplication de ce vecteur par une matrice.

La matrice représentant une symétrie par rapport à l'axe des x est :

$$\mathcal{S}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice représentant une symétrie par rapport à l'axe des y est :

$$\mathcal{S}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinaison de transformations

Si l'on veut appliquer sur un vecteur plusieurs transformations successives, il est possible d'obtenir le résultat en **multipliant dans le bon ordre** les matrices correspondant à chacune des transformations.

Exemple : La matrice d'une rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$ s'écrit

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nous effectuons deux fois la rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$, nous devons en principe retrouver une rotation d'angle π . Dans la représentation matricielle, cela signifie que la multiplication de deux matrices $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \times \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ devrait donner une matrice \mathcal{R}_{π} . Vérifions-le

	$\times \nearrow$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$
$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \times \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$

Nous obtenons donc bien

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} \times \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\pi}$$

3.4 Application des matrices à la résolution de systèmes d'équations linéaires

3.4.1 Définition

Un système d'équations linéaires ou **système linéaire** (S) est une famille de n équations linéaires faisant intervenir p inconnues. Ces inconnues x_1, x_2, \dots, x_p sont habituellement regroupées dans le membre de gauche de chacune des équations. Le membre de droite est alors composé de constantes. Ces constantes et les coefficients de ces équations sont en général réels, mais les méthodes décrites ici sont valables aussi pour les complexes. Nous allons noter a_{ij} le coefficient de la variable x_j dans l'équation (i) et b_i la constante dans le membre de droite de l'équation (i).

$$(S) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1p} x_p = b_1 & (1) \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2p} x_p = b_2 & (2) \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{np} x_p = b_n & (n) \end{cases}$$

Il est utile d'associer à ce système une **représentation matricielle**. Nous pouvons ainsi regrouper les inconnues en une matrice colonne X et les éléments du second membre en une matrice colonne B . Les coefficients des équations forment de la même manière une matrice $n \times p$ A , appelée la matrice du système.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors sous la forme : $A \times X = B$.

Lorsque la matrice B est nulle, le système est dit **homogène**.

Notre but est de chercher les solutions d'un tel système. Trois cas peuvent se présenter :

1- Il n'y a aucune solution.

2- Il y a une valeur unique pour chaque inconnue. La solution est unique.

3- Il y a une infinité de solutions. Ce qui ne veut pas dire que n'importe quelle solution soit valable. Mais nous verrons cela un peu plus loin.

Propriétés

Un système homogène a toujours au moins une solution : $X = 0$

Si $n < p$ (il y a moins d'équations que d'inconnues), il ne peut pas y avoir de solution unique : soit le système a une infinité de solution, soit il n'en a pas.

3.4.2 Résolution par échelonnement

On montre, mais nous ne le ferons pas ici, que remplacer une équation dans un système par une combinaison linéaire de cette équation avec les autres équations du système ne change pas les solutions. Cette méthode consiste à effectuer ce genre de remplacement pour simplifier la résolution du système. Il est alors important de veiller à garder le même nombre d'équations lors de ce travail. Le but est d'obtenir un système d'équations échelonné, c'est-à-dire dont la matrice représentative est échelonnée, plus simple à résoudre. Il est possible de travailler avec le système d'équations directement ou bien sur la matrice représentative (on dit alors que c'est la méthode du "pivot de Gauss") suivant ses préférences. C'est la méthode la plus simple et la plus universelle. Une illustration par un exemple permet d'expliquer plus précisément la méthode.

Exemple : Nous cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 & (1) \\ -x + y + z = 0 & (2) \\ x + y + z = 6 & (3) \end{cases}$$

La représentation matricielle de ce système est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_B$$

- *Résolution échelonnée directe du système* :

Il faut donc combiner les différentes équations pour obtenir un système "triangulaire", c'est-à-dire une équation où apparaît une inconnue, une équation où apparaissent deux inconnues et la troisième équation avec trois inconnues. Nous allons remplacer les équations du système par des combinaisons linéaires de ces équations avec les autres, mais il faut veiller à garder trois équations jusqu'à la fin.

Ainsi, nous pouvons remplacer l'équation (1) par la combinaison permettant d'isoler la variable z : $2 \times (1) - (2) - 3 \times (3)$ ce qui donne le système suivant.

$$\begin{cases} 2z = 2 & 2 \times (1) - (2) - 3 \times (3) = (1)' \\ -x + y + z = 0 & (2) \\ x + y + z = 6 & (3) \end{cases}$$

De même, nous pouvons remplacer l'équation (2) par la combinaison permettant d'isoler les variables y et z : (2) + (3) ce qui donne le système suivant.

$$\begin{cases} 2z = 2 & (1)' \\ 2y + 2z = 6 & (2) + (3) = (2)' \\ x + y + z = 6 & (3) \end{cases}$$

Ce système d'équation est un système échelonné. La solution découle alors directement.

L'équation (1)' nous indique que : $z = 1$

En remplaçant z par sa valeur dans (2)', on obtient une équation en y :

$$2y + 2 = 6 \implies y = 2$$

En remplaçant y et z par leur valeur dans (3), nous obtenons l'équation en x :

$$x + 2 + 1 = 6 \implies x = 3$$

- *Résolution échelonnée par pivot de Gauss :*

Cette méthode va suivre le même principe que la précédente. La différence réside sur le fait que nous allons manipuler (faire des combinaisons linéaires) de lignes de matrice au lieu de manipuler des équations. La notation est alors allégée. Il faut, en premier lieu, créer une matrice composée de la juxtaposition des matrices A et B , soit si l'on suit l'exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 & 2 & 3}^A & \overbrace{10}^B \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ \vdots & & & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ \vdots \end{array}$$

Nous allons remplacer progressivement les lignes de cette matrice par des combinaisons linéaires des autres lignes avec celle-ci afin de transformer la partie venant de A en matrice triangulaire. Toute combinaison linéaire est a priori acceptable, mais il existe une méthode qui fonctionne de façon efficace

1- Laisser la première ligne (L_1) en l'état.

2- Combiner (L_1) avec chacune des autres lignes, une à une, afin que ces dernières soient remplacées par des lignes dont, au moins, le premier coefficient est nul. Dans notre exemple, cela donne

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) + (L_1) = (L_2)' \\ (L_3) - (L_1) = (L_3)' \end{array}$$

3- (L_2)' est maintenant fixée à son tour

4- Combiner (L_2)' avec chacune des autres lignes situées en dessous, une à une, afin que ces dernières soient remplacées par des lignes dont, au moins, les deux premiers coefficients sont nuls. Dans notre exemple, cela donne

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2)' \\ 3 \times (L_3)' + (L_2)' = (L_3)'' \end{array}$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste au plus que deux coefficients non-nuls sur la dernière ligne.

Après ces transformations, nous pouvons réécrire le système d'équations correspondant à la matrice obtenue

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 & (1) \\ 3y + 4z = 10 & (2)' \\ -2z = -2 & (3)'' \end{cases}$$

Nous savons que ce système d'équations possède les mêmes solutions que le système que nous avons au départ. On en déduit

$$\begin{aligned} (3)'' &\iff z = 1 \\ (2)' &\implies 3y + 4 = 10 \iff y = 2 \\ (1) &\implies x + 4 + 3 = 10 \iff x = 3 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les solutions précédemment obtenues par la résolution directe du système.

3.4.3 Résolution d'un système régulier à l'aide de la matrice inverse

Cette méthode n'est valide que pour les matrices carrées. Nous pouvons toutefois remarquer que toute matrice représentative d'un système d'équations peut être rendue artificiellement carrée en rajoutant des lignes et/ou des colonnes de 0 (c'est-à-dire en rajoutant des équations dont les coefficients sont nuls et/ou des variables "fantômes" dont les coefficients sont toujours nuls).

On dispose donc d'un système dont la représentation matricielle est : $A \times X = B$

Deux possibilités se présentent alors :

1/ Le déterminant de A est non-nul. A est inversible. La solution du système est unique et se calcule à partir des matrices A^{-1} et B . En effet, nous avons

$$\begin{aligned} A X &= B \\ \underbrace{A^{-1}A}_I X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

2/ Le déterminant de A est nul. A n'est pas inversible. Le système n'a pas de solution, ou, au contraire, en a une infinité. Une résolution par échelonnement permet de distinguer les deux cas.

Exemple 1 : Cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 10x + 20y = 20 & (2) \end{cases}$$

La représentation matricielle du système est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}}_B$$

Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$$

La matrice A n'est pas inversible. Il faut donc déterminer si le système a des solutions ou non.

Pour déterminer cela, il faut utiliser la même méthode que pour la résolution par échelonnement : effectuer des combinaisons linéaires des équations du système pour échelonner le système.

Ici, nous pouvons remplacer l'équation (2) par : $(2) - 10 \times (1)$ ce qui donne

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 0 = 20 - 20 = 0 & (2) - 10 \times (1) = (2)' \end{cases}$$

L'équation $(2)'$ est vraie pour toute valeur de x et y . Cela signifie que les deux équations (1) et (2) sont équivalentes et ont les mêmes solutions. Le système revient donc à une seule équation à deux inconnues : il y a une infinité de solutions. x peut prendre n'importe quelle valeur du moment que y satisfait à l'équation (1) ou (2).

Exemple 2 : Cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 10x + 20y = 10 & (2) \end{cases}$$

La représentation matricielle du système est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}}_B$$

Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$$

La matrice A n'est pas inversible. Il faut donc déterminer si le système a des solutions ou non.

Pour déterminer cela, il faut utiliser la même méthode que pour la résolution par échelonnement : effectuer des combinaisons linéaires des équations du système pour échelonner le système.

Ici, nous pouvons remplacer l'équation (2) par : $(2) - 10 \times (1)$ ce qui donne

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 0 = 10 - 20 = -10 & (2) - 10 \times (1) = (2)' \end{cases}$$

L'équation $(2)'$ est impossible. Il n'y a pas de solution.

Exemple 3 : Reprenons le système déjà résolu précédemment par échelonnement :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

La représentation matricielle de ce système est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_B$$

A est une matrice carrée. On peut donc calculer son déterminant et voir si elle est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 - 1) - (-1) \times (2 - 3) + 1 \times (2 - 3) = -2$$

Le déterminant n'est pas nul. La matrice est inversible. Cherchons sa matrice inverse :

$$\begin{aligned} \operatorname{com} A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \implies {}^t \operatorname{com} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{{}^t \operatorname{com} A}{\det A} = \frac{1}{(-2)} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution du système s'obtient en multipliant les matrices :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{-2} \\ \frac{20-24}{-2} \\ \frac{-20+18}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution est, bien entendu, la même que par les méthodes par échelonnement.

Chapitre 4

LES FONCTIONS

4.1 Définitions

Soient E et F deux sous ensembles de l'ensemble des nombres réels, \mathbb{R} . Une fonction de E à valeur dans F est une correspondance qui à tout nombre réel, x , de E associe un nombre réel, $f(x)$, de F .

De telles fonctions sont des "**fonctions réelles d'une variable réelle**", les seules que nous considérons ici*

$$x \mapsto f(x) = y$$

On dit alors que y est fonction de x .

E est l'ensemble de définition tandis que F est l'ensemble des valeurs.

Lorsqu'une valeur $y \in F$ est l'image d'une seule variable, x de E , la correspondance entre x et y établie par la fonction f est dite "**biunivoque**". Dans ce cas on définit la fonction, h , inverse de f :

$$y \mapsto h(y) = x \text{ telle que } f(x) = y$$

Les fonctions f et h sont des **fonctions inverses** l'une de l'autre.

Le plan étant rapporté à 2 axes $\{Ox, Oy\}$ on considère le point M de coordonnées $(x, y = f(x))$. L'ensemble des points M constitue "**le graphe**" de f .

Par exemple l'aire, A , d'un carré de côté x est $A = x^2 := f(x)$. Par nature, x est positif; cependant l'intervalle de définition de la fonction mathématique $x \mapsto y = x^2$ est l'ensemble des réels; son graphe est une parabole.

Pour calculer numériquement l'aire du carré de côté a , nous remplaçons a par une grandeur mesurée, entachée d'une erreur inconnue. Par définition **l'erreur absolue** sur une grandeur G est la différence entre l'estimation \tilde{G} de G et sa valeur

$$\text{erreur} = \tilde{G} - G := e$$

On utilise aussi la même dénomination "erreur absolue" pour désigner $|\tilde{G} - G|$.

Une mesure du côté nous donne une estimation de a . Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ les estimations de a obtenues par des mesures successives de plus en plus précises. Cela signifie que les erreurs sont de plus en plus petites : $|x_n - a| < \dots < |x_2 - a| < |x_1 - a|$. Lorsque l'erreur est arbitrairement petite (pour n assez grand) on dit que " x tend vers a " (on écrit $x \rightarrow a$ ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$). Les estimations correspondantes de A sont

*Nous étudions plus loin les fonctions réelles de plusieurs variables.

$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ L'erreur sur A devient arbitrairement petite lorsque x_n tend vers a . Une telle propriété caractérise les fonctions, f , continues.

Imaginons un instant que ce ne soit pas le cas. Les conséquences en seraient surprenantes; en effet il ne servirait plus à rien d'améliorer la précision sur a car cela n'améliorerait pas notre connaissance de A . Comme aucune mesure ne peut donner la valeur exacte de a , jamais nous ne pourrions disposer d'une approximation de A .

Cette propriété qui nous permet d'obtenir une bonne estimation de $f(x)$ si nous disposons d'une bonne estimation de la variable x , reflète la "**continuité**" de la fonction f .

L'exemple précédent montre l'importance des fonctions continues en physique.

Lorsque x tend vers a par valeurs inférieures ($0 < (a - x) \rightarrow 0$), la fonction $f(x)$ admet la limite $f(a_-)$. Similairement on note $f(a_+)$ la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a par valeur supérieures ($0 < (x - a) \rightarrow 0$).

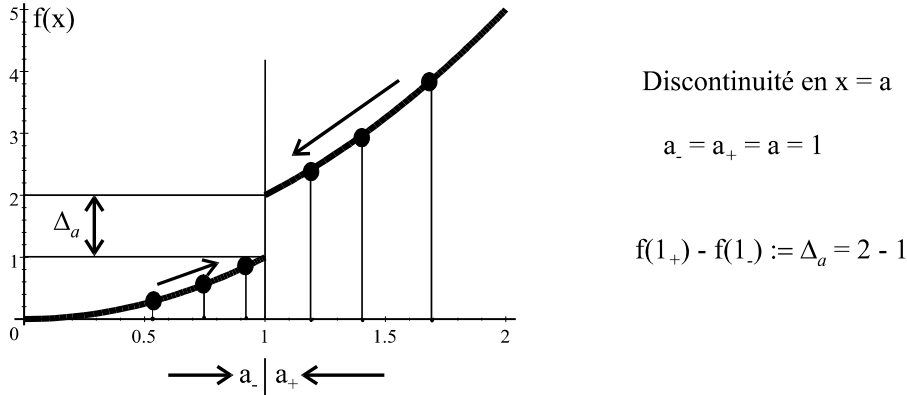


fig. 4.1 : Discontinuité en $x = a$; $\Delta_a = 2 - 1 = 1$.

Si la fonction f présente une discontinuité en $x = a$, les limites de $f(x)$ ne sont pas les mêmes dans les deux cas : $f(a_-) \neq f(a_+)$ (cf. fig. 4.1). La **discontinuité** en a est la différence $f(a_+) - f(a_-) := \Delta_a$.

4.2 Limites

Après avoir introduit intuitivement la notion de limite, nous en donnons ici une définition plus précise.

Supposons que $|f(x) - \ell|$ est arbitrairement petit si on choisit $|x - a|$ assez petit, ou encore que $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut si l'on choisit x assez proche de a . On résume cette propriété en disant " $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a " et on écrit " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ", ou encore " $f(x) \rightarrow \ell$ lorsque $x \rightarrow a$ ".

N.B. Lorsque $\lim f$ est supérieure (resp. inférieure) à tout nombre, on écrit

$$\lim f = +\infty \text{ ou } f \rightarrow +\infty \text{ (resp. } \lim f = -\infty \text{ ou } f \rightarrow -\infty).$$

Rappelons quelques résultats utiles. $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions continues λ est une constante quelconque, α une constante positive et n un entier positif.

$\lim_{x \rightarrow a} [u(x) + \lambda v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)] + \lambda \lim_{x \rightarrow a} [v(x)]$	$\lim_{x \rightarrow a} [u(v(x))] = u(v(a))$
$\lim_{x \rightarrow a} [u \cdot v] = \lim_{x \rightarrow a} [u] \cdot \lim_{x \rightarrow a} [v]$	$\lim_{x \rightarrow a} [u / v] = \lim_{x \rightarrow a} [u] / \lim_{x \rightarrow a} [v]$
$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^\alpha = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^{-\alpha} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0_-} x^n = (-1)^n \times 0_+$ $\lim_{x \rightarrow 0_-} x^{-n} = (-1)^n \times \infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} = 0_+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-1)^n \times \infty$
$\lim_{x \rightarrow 0_+} [\ln x] = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x] = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x] = 0_+, \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x] = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0_+} [x^\alpha \ln x] = 0 = \lim_{x \rightarrow 0_+} [x^\alpha]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{-\alpha} \ln x] = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{-\alpha}]$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x ^\alpha e^x] = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{-\alpha} e^x] = \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x]$

On remarquera le rôle prédominant des exponentielles devant leur logarithme pour l'obtention des 4 limites précédentes.

4.3 Dérivées

4.3.1 Généralités

Soit la fonction f et le point $A(a, f(a))$ de son graphe. Soit M un point voisin de A sur le graphe de f , de coordonnées $(a + \Delta x, f(a) + \Delta y)$ (cf. fig 4.2) On définit la "dérivée de f au point a " :

$$f'(a) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

Il peut arriver cependant que la limite n'existe pas ; la fonction n'est alors pas dérivable en $x = a$.

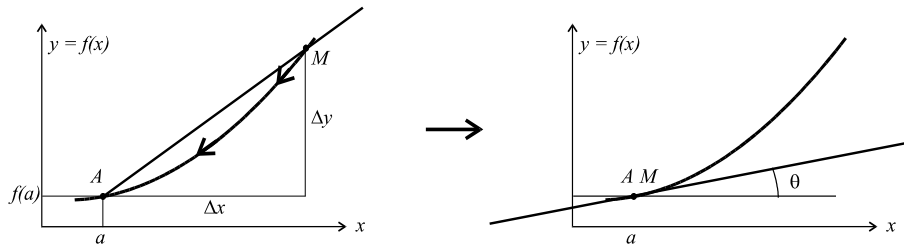


fig. 4.2 : $f'(a) := \left(\frac{d}{dx} f \right)_a = \tan \theta$.

Lorsque la dérivée est positive **la fonction est croissante** ($\tan \theta > 0$) ; dans le cas contraire ($\tan \theta < 0$) **la fonction est décroissante**.

Dans le cas général, nous définissons "la dérivée à gauche" et "la dérivée à droite" de la fonction f au point a :

$$\text{dérivée à gauche} : f'(a_-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_-} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

$$\text{dérivée à droite} : f'(a_+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0_+} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

Ces deux quantités peuvent être différentes. La fonction f' est alors discontinue en $x = a$. Si, dans ce cas, la fonction f est continue en a , le point de son graphe est appelé "point anguleux".

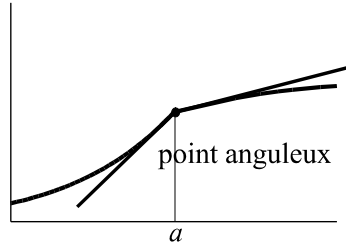


fig. 4.3 : $f'(a_-) \neq f'(a_+)$

Supposons que f soit dérivable en tous points. On définit alors la "**fonction dérivée**" : $x \mapsto f'(x)$.

On peut noter que les fonctions f et f' que nous rencontrons sont le plus souvent continues, il convient toutefois de se garder en mémoire que ce n'est pas le cas de toutes les fonctions.

Il est plus commode d'utiliser les notations suivantes, qui ont le bon goût d'être d'utilisation plus générale (notamment pour les fonctions à plusieurs variables) :

$$\begin{aligned} f'(a) &: = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_a := \left(\frac{df}{dx} \right)_a := \left(\frac{df}{dx} \right) (a) \\ f'(x) &: = \frac{df(x)}{dx} := \frac{d}{dx} f(x) := \left(\frac{df}{dx} \right)_x := \left(\frac{df}{dx} \right) (x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ces notations trouveront leur justification plus loin lors de l'étude des différentielles.

La fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$ peut elle même être dérivée. On obtient ainsi la "dérivée seconde" :

$$f''(x) := \frac{df'(x)}{dx} := \frac{d^2 f(x)}{dx^2} := \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_x := \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) (x)$$

On obtient, par dérivation successive, les "dérivées d'ordre n " :

$$f \overbrace{'}^n := \frac{d^n f(x)}{dx^n} := \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_x$$

Attention à la position de " n " : on note " $d^n f$ " et " dx^n ". De plus, aucune fantaisie n'est admise pour le " d " car les symboles ∂ ou D ou δ ont d'autres significations précises, dont certaines seront présentées ultérieurement.

L'allure du graphe de f au voisinage d'un point dépend des propriétés des dérivées de f en ce point. Les figures ci-dessous (4.4 et 4.5) rappellent divers cas.

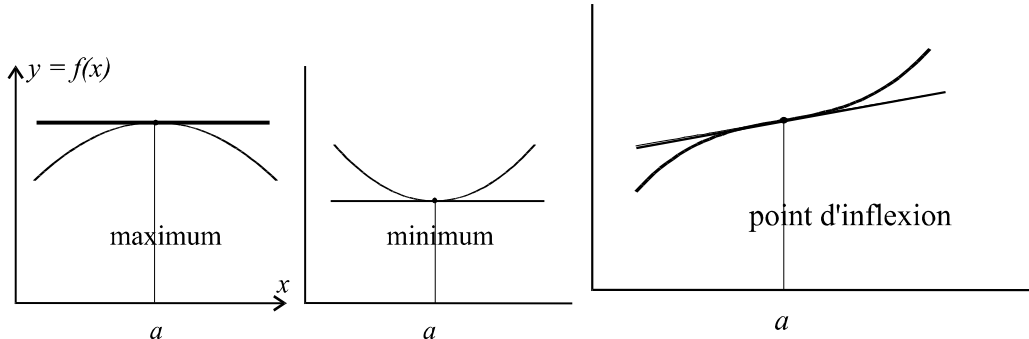


fig. 4.4 : $\left(\frac{d}{dx}f\right)_a = 0$.

fig. 4.5 : $\left(\frac{d^2}{dx^2}f\right)_a = 0, \left(\frac{d^3}{dx^3}f\right)_a \neq 0$.

Dans les cas représentés sur la figure 4.4 on dit que la fonction f présente un **extremum** pour la valeur $x = a$.

4.3.2 Calcul de dérivées.

Rappelons sans démonstration les principales formules concernant le calcul de dérivées. Ces expressions se rencontrent souvent et **il convient de les mémoriser**.

La variable est ici x et nous posons $\frac{d}{dx}(\) := (\)'$.

n et a sont des constantes; $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions de x .

$y =$	a	ax	x^n	$\frac{1}{x} := x^{-1}$	$\sqrt{x} := x^{1/2}$	$y =$	e^{ax}	$\ln(ax)$
$y' =$	0	a	$n x^{n-1}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y' =$	ae^{ax}	$\frac{1}{x}$

$y =$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
$y' =$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

$y =$	$au + v$	$u \cdot v$	$\frac{u}{v}$	$f[u(x)]$	u^n
$y' =$	$a u' + v'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	$\frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	$u' \cdot \left(\frac{df(u)}{du}\right)_{u(x)}$	$n u' u^{n-1}$

Il faut toujours prendre garde à la variable par rapport à laquelle s'effectue la dérivation. Par exemple cherchons $\frac{d}{dt}(\cos \omega t)$. Posons $u(t) = \omega t$ et $f(u) = \cos u$. Nous

voulons calculer $\frac{df}{dt}$; dans ce cas $u' = \omega$ et $\frac{df}{du} = -\sin u$.

On trouve donc $\frac{df}{dt} = u' \cdot \frac{df}{du} = \omega \cdot (-\sin u) = -\omega \cdot \sin \omega t$.

Pour ce dernier exemple, nous pouvons remarquer que : $u' = \frac{du(t)}{dt} = \frac{du}{dt}$; ce qui

revient à dire que : $\frac{df}{dt} = u' \cdot \frac{df}{du} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{df}{du}$. Nous mettons ainsi en avant une des propriétés

de cette notation : $\frac{df}{dt}$ est un rapport entre deux différentielles

4.4 Etude d'une fonction

4.4.1 Propriétés remarquables.

Certaines fonctions présentent des propriétés remarquables que nous rappelons sur les figures suivantes (4.6 et 4.7).

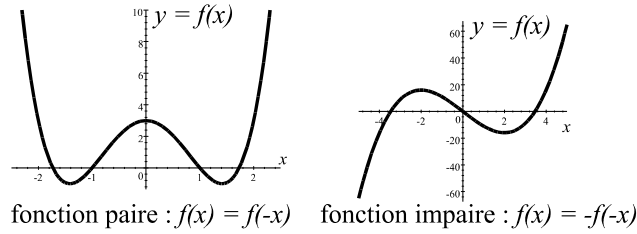


fig. 4.6 : Parité.

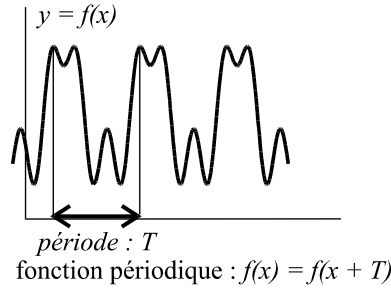


fig. 4.7 : Périodicité.

Parmi les fonctions trigonométriques par exemple, les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont toutes deux périodiques de période 2π . La fonction "cos" est en outre paire tandis que la fonction "sin" est impaire. La fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire et périodique de période π .

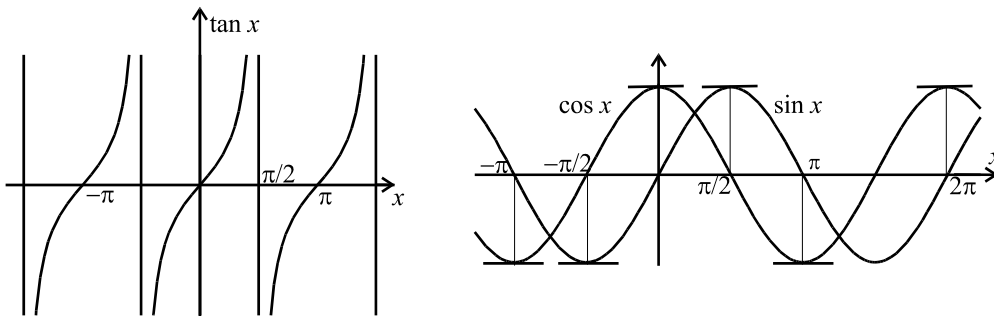


fig. 4.8 : Fonctions trigonométriques : "tangente", "cosinus", "sinus".

Certaines fonctions présentent en outre des comportements remarquables. Parmi ces fonctions, on distingue celles qui possèdent des asymptotes.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} |f| = \infty$ la fonction f présente une "asymptote verticale" en $x = a$. C'est le cas de la fonction $x \mapsto \tan x$ en $x = \pi/2$ (cf. figure 4.8).

Lorsque $f(x) - (ax + b) := g(x)$ devient arbitrairement petit pour $x \mapsto \pm\infty$, on peut pratiquement remplacer (pour x assez grand) la fonction f par la fonction $ax + b$. Le graphe de f est alors pratiquement celui d'une droite : cette droite est une *asymptote oblique*. Lorsque $a = 0$, l'asymptote est une *asymptote horizontale*.

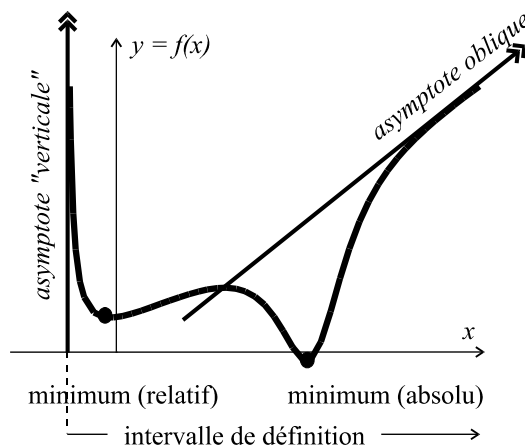


fig. 4.9

4.4.2 Etude d'une fonction.

Il faut utiliser les moyens de l'informatique pour étudier une fonction et tracer son graphe, tout particulièrement si on recherche une bonne précision numérique. Mais ces moyens doivent rester sous le contrôle et la critique de l'utilisateur.

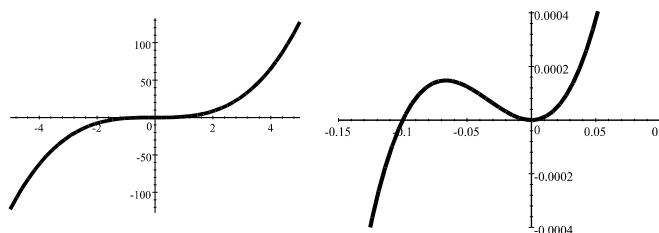


fig. 4.10 : $x \mapsto x^3 + x^2/10$.

Nous avons utilisé un logiciel spécialisé dans les problèmes de mathématiques pour tracer le graphe de la fonction $x \mapsto x^3 + x^2/10$. Nous avons obtenu la première courbe de la figure 4.10 qui est fournie par défaut.

Parce que nous connaissons l'allure du graphe, nous avons étudié à grande échelle la région $x \in [-0.15, 0.1]$. Deux extrema sont apparus, insoupçonnables sur la première courbe. Toujours parce que nous connaissons l'allure du graphe, nous savons qu'aucune surprise n'est attendue dans les autres régions.

Cet exemple très simple montre que les outils informatiques, même les plus efficaces, ne permettent pas de faire l'économie des méthodes d'étude des fonctions.

Intervalle de définition. Etant donnée une fonction à étudier, le premier point à éclaircir est son intervalle de définition. Il faut retenir que $\sqrt{u(x)}$ n'est défini que pour $u(x) \geq 0$ et que $1/u(x)$ n'est pas défini pour $u(x) = 0$.

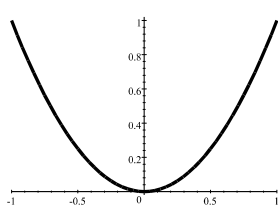


fig. 4.11 : $y = x^2$.

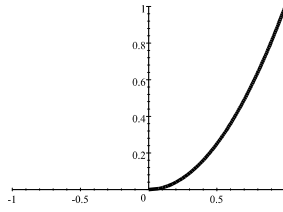


fig. 4.12 : $y = (\sqrt{x})^4$.

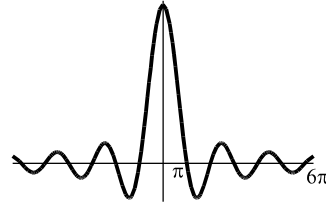


fig. 4.13 : $y = \frac{\sin x}{x}$.

La fonction $y = x^2$ est définie pour tout x ; par contre $(\sqrt{x})^4$ n'est pas défini pour $x < 0$ tandis que sa valeur est celle de x^2 pour $x \geq 0$. Ces propriétés expliquent les graphes des deux premières fonctions.

Quant à la fonction $(\sin x)/x$, elle n'est pas définie pour $x = 0$, cependant $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = 1$. Pour cette raison, aucune "pathologie" n'apparaît en $x = 0$. On définit la fonction $\text{sinc } x$ par les relations $\text{sinc } x := (\sin x)/x$ pour $x \neq 0$ et $\text{sinc } 0 = 1$. Ainsi la fonction $\text{sinc } x$ est elle définie et continue pour tout x .

Intervalle d'étude. Il est parfois possible de limiter l'étude d'une fonction à un intervalle plus petit que l'intervalle de définition. Si la fonction est paire, ou impaire, il suffit de l'étudier dans l'intervalle $[0, \infty[$ et d'utiliser les propriétés de symétrie (cf. fig 4.6). Si la fonction est périodique il suffit de l'étudier dans un intervalle d'amplitude égale à la période T .

Exemple. $f(x) = 1 + \tan^2(\pi x)$. Cette fonction est périodique de période $T = 1$. Elle est paire, il suffit donc de l'étudier dans l'intervalle $[0, 1/2]$. Par parité nous connaissons son graphe dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ et grâce à sa périodicité nous obtiendrons le graphe dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

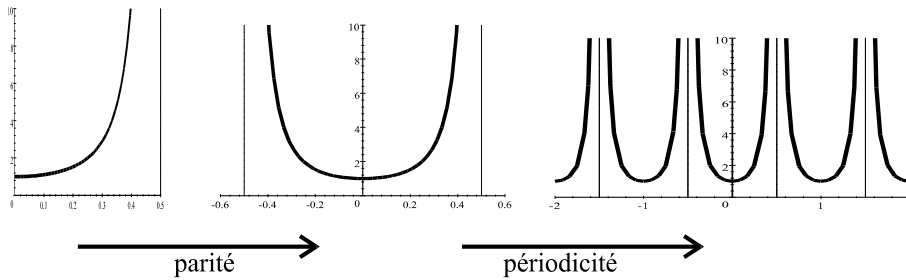


fig. 4.14 : L'intervalle d'étude de $x \mapsto 1 + \tan^2(\pi x)$ est $[0, 1/2]$.

Etude aux limites de l'intervalle d'étude.

Premier exemple. Dans l'exemple précédent, la fonction est définie et vaut 1 en $x = 0$. Elle n'est pas définie en $x = 1/2$ mais elle tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 1/2$: asymptote verticale.

Deuxième exemple. La fonction $f(x) := (2x^2 + 1) / (x^2 + 5)$ est définie dans tout \mathbb{R} . Elle est paire, l'intervalle d'étude est donc $[0, +\infty[$. Le calcul direct donne $f(0) = 1/5$. Lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ on met en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$f(x) := \frac{2x^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = 2 \frac{\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2$$

Ainsi $(f(x) - 2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. On est donc en présence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

Troisième exemple. La fonction $f(x) = (2x^3 - x^2 + 4) / (x^2 + x + 1)$ est définie dans tout \mathbb{R} . Elle se traite de la même façon, en plusieurs étapes lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\begin{aligned} 1^{\text{ère}} \text{ étape} & : f(x) := \frac{2x^3 \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \propto 2x \\ 2^{\text{ème}} \text{ étape} & : f(x) - 2x = \frac{-3x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{-3x^2 \left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -3 \end{aligned}$$

Le symbole " \propto " se lit "équivalent à". **Deux fonctions sont dites équivalentes lorsque leur rapport tend vers 1 dans les conditions considérées.** Les graphes ont alors même allure mais cela ne signifie pas que les fonctions sont voisines (par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x + 2$ sont deux fonctions équivalentes lorsque $x \rightarrow \infty$ mais $g(x) - f(x) = 2$ ne tend pas vers zéro).

Ici $f(x) - 2x \rightarrow -3$ ce qui implique $f(x) - (2x - 3) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. Le graphe de f admet donc la droite $y = 2x - 3$ comme asymptote.

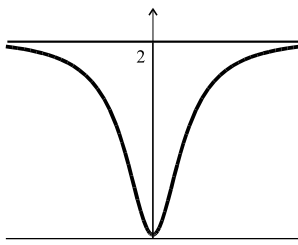
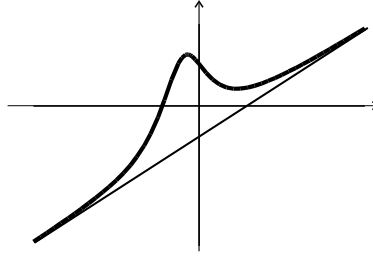
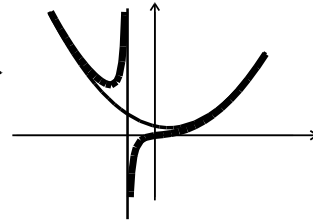
Quatrième exemple. La fonction $f(x) := (2x^3 + x) / (x + 1)$ est définie pour tout $x \neq -1$. L'intervalle de définition est $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$.

Au voisinage de $x = -1$ il vient $f(x) \propto -3/(x + 1)$. Lorsque $x \rightarrow (-1)_{(-)}$ la fonction $f(x) \rightarrow +\infty$. Lorsque $x \rightarrow (-1)_{(+)}$ la fonction $f(x) \rightarrow -\infty$. Le graphe présente donc une asymptote verticale.

Le graphe possède une branche parabolique lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. En effet dans ces conditions

$$\begin{aligned} f(x) & : = \frac{2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \propto 2x^2 \\ f(x) - 2x^2 & = \frac{-2x^2 \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \propto -2x \\ f(x) - 2x^2 + 2x & = \frac{3x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 3 \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) - (2x^2 - 2x + 3) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. Lorsque $|x|$ est assez grand, $f(x)$ se comporte comme la parabole $y = 2x^2 - 2x + 3$.

fig. 4.15 : $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$ fig. 4.16 : $y = \frac{2x^3 - x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$ fig. 4.17 : $y = \frac{2x^3 + x}{x + 1}$

Dans les exemples précédents les asymptotes sont les mêmes pour $x \rightarrow \pm\infty$. Il peut arriver qu'elles soient différentes en $+\infty$ et $-\infty$.

La méthode précédente s'applique dans tous les cas, même si la fonction n'est pas le rapport de deux polynômes. Il faut savoir cependant que bien souvent il n'existe aucun comportement asymptotique simple.

Remarques diverses. Souvent il est possible de remarquer que $f(x)$ est positive dans telle région, qu'elle est monotone croissante, ou encore de déterminer aisément ses extrema ou ses intersections avec les axes.

Sens de variation. Enfin on complète l'étude précédente par l'étude du sens de variation de la fonction.

Rappelons les principaux résultats.

$$\frac{df}{dx} > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow \text{ (croissante)}$$

$$\frac{df}{dx} < 0 \Rightarrow f(x) \searrow \text{ (décroissante)}$$

Les extrema sont obtenus pour $df/dx = 0$.

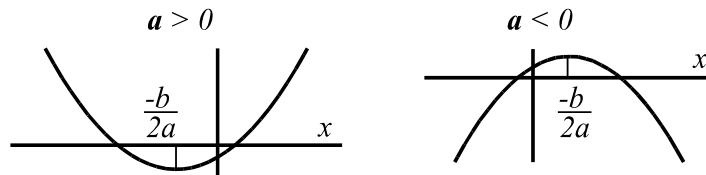
Pour déterminer le comportement de la fonction, il faut donc étudier sa dérivée $df/dx := f'(x)$ et tout particulièrement le signe de sa dérivée. La fonction $f'(x)$ s'étudie comme une fonction...

4.4.3 Fonctions remarquables.

Outre les méthodes générales que nous avons rappelées, certaines fonctions doivent être bien connues. Ce sont

Les trois fonctions trigonométriques $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ (voir fig. 4.8 ci-dessus).

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

fig. 4.18 : $y = ax^2 + bx + c$

Remarquons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour racines l'abscisse des points d'intersection de la parabole avec l'axe des x .

L'absence de solution ($b^2 - 4ac < 0$) se traduit donc par l'absence de ces points.

L'hyperbole d'équation $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

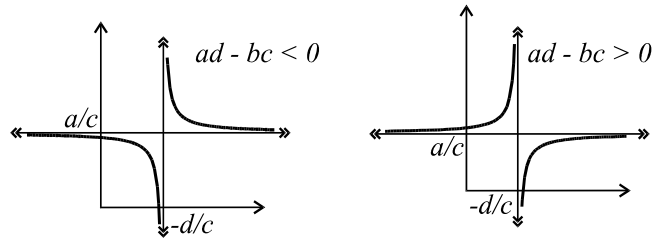


fig. 4.19 : $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

La fonction exponentielle et la fonction logarithme

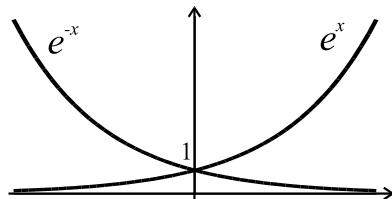


fig. 4.20 : Exponentielles.

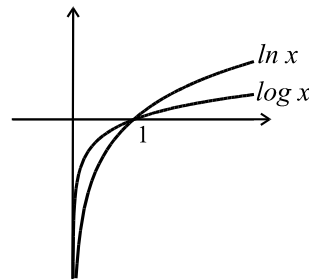


fig. 4.21 : Logarithmes.

Deux cas particuliers se rencontrent très souvent.

1. La fonction f est la somme, $f = g + h$, de deux fonctions, l'une, $g(x)$, croissante, l'autre, $h(x)$, décroissante et tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Dans les cas intéressants en physique, la fonction f admet souvent un minimum. Lorsque $x \rightarrow \infty$, les fonctions f et g deviennent arbitrairement voisines car $h \rightarrow 0$. Un exemple est donné fig. 4.22.

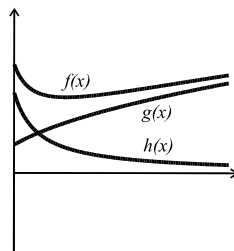


fig. 4.22

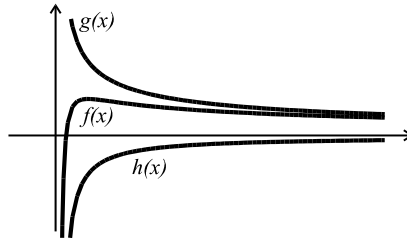


fig. 4.23

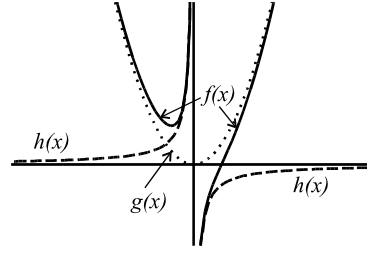


fig. 4.24

2. La fonction f est la somme de deux fonctions : $g(x) = ax^n$ et $h(x) = bx^m$ avec $n > m$.

Pour x voisin de l'origine on pose $f = bx^m(1 + (a/b)x^{n-m})$. L'exposant $n - m$ étant positif il vient $x^{n-m} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Dans ce cas $f \propto bx^m = h(x)$.

Pour $x \rightarrow \infty$ on pose $f = ax^n(1 + (b/a)x^{m-n})$. L'exposant $m - n$ est négatif ; x^{m-n} devient négligeable lorsque $x \rightarrow \infty$. On trouve $f \propto ax^n = g(x)$.

La figure 4.23 représente le cas $g(x) = 3/\sqrt{x}$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = -1/2$ et $m = -1$).

La figure 4.24 représente le cas $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = 2$ et $m = -1$).

4.5 Développement de Taylor

4.5.1 Développement de Taylor.

Considérons une fonction $f(x)$. Seules nous intéressent les valeurs de x voisines de $x = a$.

Par exemple nous voulons construire un thermomètre à mercure utilisable entre $T_1 = 263 \text{ K}$ (soit -10°C) et $T_2 = 323 \text{ K}$ (soit 50°C). La hauteur h , de la colonne de mercure est une fonction de la température : $h = f(T)$. Nous voulons connaître cette fonction f au voisinage de $T_0 = 293 \text{ K}$, dans l'intervalle $[293 \text{ K} - 30 \text{ K}, 293 \text{ K} + 30 \text{ K}]$. Il n'est pas nécessaire de connaître exactement la fonction f car de toutes façons la mesure effectuée aura une précision limitée.

En général on pose $x := a + \delta x$ (soit $\delta x := x - a$). Une première approximation consiste à admettre $\tilde{f}(a + \delta x) = f(a)$ où \tilde{f} est une estimation de f .

Lorsque la dérivée $f'(a)$, de la fonction f , est non nulle en $x = a$, une meilleure approximation consiste à remplacer le graphe de f par sa tangente en $x = a$ et à poser $\tilde{f}(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\delta x$. En effet, par définition de la dérivée, il vient $f'(a) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a + \delta x) - f(a)}{\delta x} \right)$ ce qui signifie que $\frac{f(a + \delta x) - f(a)}{\delta x} - f'(a) = \varepsilon$ où ε devient négligeable lorsque $\delta x \rightarrow 0$. On en déduit la relation $f(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\delta x + \varepsilon\delta x$. Si δx est assez petit, ε devient négligeable devant $f'(a)$ et $\varepsilon\delta x$ peut être négligé devant $f'(a)\delta x$. Il vient $f(a + \delta x) \simeq f(a) + f'(a)\delta x$; ainsi on obtient l'estimation

$$\tilde{f}(a + \delta x) = f(a) + f'(a)\delta x.$$

Cette méthode se généralise. Nous n'en donnerons pas la démonstration mais seulement le résultat :

$$\tilde{f}(a + \delta x) = f(a) + \left(\frac{df}{dx} \right)_a \delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_a \delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_a \delta x^n \quad (4.2)$$

où $n!$ est "factoriel n " : $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1^\dagger$.

Cette formule est la **formule de Taylor**. Elle permet de remplacer une fonction par un polynôme au voisinage d'une valeur quelconque de la variable. Le degré du polynôme est appelé "ordre du développement" (ci-dessus, c'est n) on dit aussi que 4.2 est le "**développement limité à l'ordre n** " de la fonction $f(x)$.

L'erreur commise est $e := \left| \tilde{f}(a + \delta x) - f(a + \delta x) \right|$.

On démontre que $e \sim |H(x) \cdot \delta x^n|$ où H tend vers zéro lorsque δx tend vers zéro.

Bien entendu, un tel développement ne peut s'obtenir que pour des fonctions suffisamment régulières (dérivables jusqu'à l'ordre $n + 1$ pour un développement limité à l'ordre n).

Les développements que l'on rencontre le plus souvent sont limités au premier ou au deuxième ordre.

4.5.2 Cas des polynômes.

Pour les polynômes de degré n la formule de Taylor contient les termes d'ordre inférieur ou égal à n , tous les termes d'ordres supérieurs sont nuls.

Par exemple $f(x) := 2 + x + 3x^2$, au voisinage de $a = 0$.

$f(x) = 2 + x + 3x^2$	$\frac{df}{dx} = 1 + 6x$	$\frac{d^2f}{dx^2} = 6$	$\frac{d^3f}{dx^3} = 0$	etc.
$f(0) = 2$	$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = 1$	$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 = 6$	$\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)_0 = 0$	etc.

Le développement de Taylor s'écrit donc

$$f(x) = 2 + 1 \cdot \delta x + \frac{6}{2!} \delta x^2 + 0 + 0 + \dots$$

Le polynôme $f(x)$ est du second degré; les termes non nuls de son développement de Taylor sont d'ordre maximal 2. Les termes d'ordres supérieurs sont tous nuls.

Avec, ici, $\delta x = x - a = x - 0 = x$ on constate que le développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre n , est rigoureusement égal à $f(x)$ pour $n \geq 2$. Ces propriétés restent valables pour une valeur quelconque de a .

Lorsque la fonction $f(x)$ n'est pas un polynôme, le développement se poursuit indéfiniment.

4.5.3 Développement de MacLaurin des fonctions usuelles.

Le développement de Taylor dans le cas $a = 0$ est appelé "développement de MacLaurin". Dans ce cas $\delta x = x - a = x - 0 = x$.

Donnons quelques exemples courants de développements de MacLaurin (les expressions encadrées doivent être sues sans hésitation).

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

[†]On pose en général $0! = 1$, ce qui permet de généraliser de nombreuses formules.

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots$
$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \dots - x^{2n+1} + x^{2n} + \dots$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$
$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \dots$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \dots$
$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots$

Les expressions ci-dessus appellent plusieurs remarques.

1. Les fonctions paires ($\cos x$) ne contiennent que des puissances paires de x .
2. Les fonctions impaires ($\sin x$ et $\tan x$) ne contiennent que des puissances impaires de x .
3. Le développement de la dérivée d'une fonction est la dérivée du développement de cette fonction ; par exemple en dérivant le développement de $\ln(1+x)$ on trouve le développement de $1/(1+x)$ qui est la dérivée de $\ln(1+x)$.

4.5.4 Validité du développement de McLaurin.

Dans les figure ci-dessous nous représentons deux fonctions et, pour chacune, deux développements à des ordres différents.

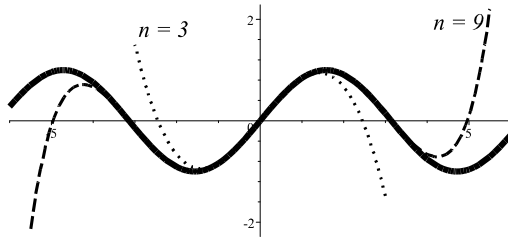


fig. 4.25 : $y = \sin x$.

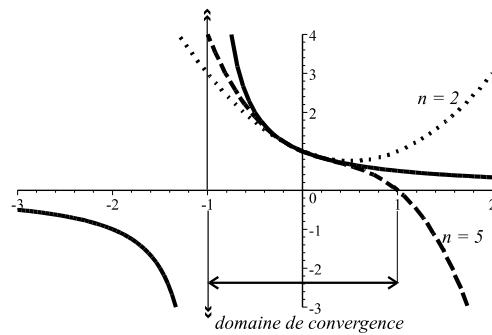


fig. 4.26 : $y = \frac{1}{x+1}$

En élevant l'ordre du développement on élargit son domaine de validité et on améliore la précision. Cependant pour la fonction $y = f(x) = 1/(1+x)$, aussi grand que soit n , le développement de Taylor ne constitue une approximation de $f(x)$ que dans le cas où $|x| < 1$. On dit que le **rayon de convergence** de la série de Taylor est 1.

4.5.5 Exemples.

Premier exemple. L'existence de développements de Taylor pour les fonctions les plus diverses expliquent pourquoi tant de lois physiques prennent des formes polynomiales (dans un domaine de validité généralement limité). Etudions un exemple.

On considère une règle à la température T_0 . Sa longueur est ℓ_0 . A la température T sa longueur est $\ell(T) := \ell_0 \cdot F(T)$, ce qui définit $F(T)$. Remarquons que $F(T_0) = 1^\ddagger$.

Une règle de longueur $L_0 = n\ell_0$ à la température T_0 peut être considérée comme n règles de longueur ℓ_0 mises bout à bout. Sa longueur à la température T sera donc $L = n\ell = n\ell_0 \cdot F(T) = L_0 \cdot F(T)$. Ainsi on obtient la loi $L = L_0 \cdot F(T)$ où $F(T)$ ne dépend pas de L_0 .

Au voisinage de $T = T_0$ on donne de $F(T)$ un développement de Taylor, limité au premier ordre : $F(T) = F(T_0) + F'(T_0) \cdot \Delta T$ où $\Delta T := T - T_0$. Posons $F'(T_0) = \alpha$ et remplaçons $F(T_0)$ par sa valeur, $F(T_0) = 1$, il vient $F(T) = 1 + \alpha \Delta T$. On déduit la loi de dilatation linéaire : $L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$ où α ne dépend que du matériau[§] constitutif de la règle et non de sa longueur L_0 .

Second exemple. Les développements de Taylor peuvent être utilisés pour le calcul d'une approximation. Soit à calculer par exemple $Z = 10/\sqrt{27}$. On écrit $Z = 10/\sqrt{25+2} = 10/\sqrt{25(1+2/25)} = (10/5) \cdot (1/\sqrt{1+x})$ avec $x = 2/25 = 0,08$.

Pour calculer $y = 1/\sqrt{1+x} = (1+x)^{-1/2}$ on peut considérer que la valeur $1+0,08$ est assez voisine de 1 pour que l'on puisse remplacer y par son développement: $y = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$. On peut aussi écrire $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + \dots$, alors $1/\sqrt{1+x} = 1/(1+X)$ avec $X = x/2 + \dots$. On utilise la relation $1/(1+X) = 1 - X + \dots$, il vient $1/\sqrt{1+x} = 1 - x/2 + \dots$. Quelle que soit la façon de procéder, au premier ordre on trouve $1/\sqrt{1+0,08} \simeq 1 - 0,04$, ce qui donne $Z = 2 \cdot (1 - 0,04) = 1,92$. Un calcul plus précis donne 1,92450...

Troisième exemple. *Pesanteur à la surface terrestre.*

L'accélération gravitationnelle d'un objet proche de la Terre peut être déduite du principe fondamental de la dynamique et de l'expression de la force de gravitation

$$a(r) = \frac{GM}{r^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ u.s.i.), M est la masse de la Terre ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg) et r la distance de l'objet au centre de la Terre.

r est la variable du problème. On suppose que l'objet n'est pas dans le sous-sol terrestre, r est donc supérieur au rayon terrestre R ($R = 6400$ km).

Pour les objets usuels à la surface terrestre (homme, voiture, éléphant, pomme, ...) dont la taille est très faible par rapport au rayon terrestre, il est possible de se contenter d'une approximation de la fonction $a(r)$ à l'ordre zéro

$$a(r) \approx a(R) = g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

Il s'agit de l'accélération de pesanteur habituelle.

Lorsque l'on se place au sommet d'une montagne (altitude h) à quelques kilomètres au-dessus de la surface, la variation de distance par rapport au centre de la Terre est encore très faible par rapport au rayon terrestre. Cependant, l'approximation à l'ordre zéro pour $a(r)$ devient insuffisante, car l'effet de l'altitude est mesurable dans beaucoup d'expériences. Il faut alors utiliser un développement limité au premier ordre

[‡]En effet $\ell_0 := \ell(T_0) = \ell_0 \cdot F(T_0)$ d'où $F(T_0) = 1$.

[§] α est appelé "coefficient de dilatation linéaire" (ou linéique).

$$a(r) = g + \left(\frac{da}{dr} \right)_R h$$

4.6 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

4.6.1 Définition et notations.

Considérons la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = a$. Posons $x = a + \delta x$. Le développement 4.2, limité au premier ordre donne l'estimation

$$\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_1(a + \delta x) = f(a) + f'(a) \cdot \delta x.$$

δx est la **variation de la variable** x (lorsqu'elle passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$\delta f := f(x) - f(a)$ est la **variation de la fonction** f (lorsque x passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$df := \tilde{f}_1(x) - f(a) := f'(a) \cdot \delta x$ est, par définition, " **la différentielle de la fonction** " f en $x = a$. C'est une fonction de δx .

Remarquons que **df est de même dimension physique que f** .

Premier exemple. On pose $f = e^{x-1}$, $a = 1$, $x = 1 + \delta x$.

Il vient $f'(1) = 1$ soit $df := f'(1) \cdot \delta x = \delta x$ tandis que $\delta f = e^{x-1} - 1 = e^{\delta x} - 1$.

Pour $\delta x = 2$ on trouve $\delta f = e^2 - 1 = 6,3890\dots \simeq 6,4$ et $df = 2$. Pour cette valeur de δx la variation de f au voisinage de a et la différentielle de f sont très différentes. Par contre pour $\delta x = 0,1$ il vient $\delta f = e^{0,1} - 1 = 0,105\dots$ et $df = 0,1$ soit $\delta f \simeq df$. Ce n'est pas surprenant car **la différentielle df est une estimation de δf au premier ordre en δx** (développement de Taylor, valable lorsque δx est assez petit).

Deuxième exemple. Considérons la fonction particulière $f(x) = x$. Dans ce cas, de même que nous notons $dg = d(x^2)$ la différentielle de $g(x) := x^2$, nous posons $df = dx$. En outre, la définition de la différentielle ($df = f'(a) \cdot \delta x$) donne $df := 1 \cdot \delta x$ soit $df = \boxed{dx = \delta x}$. **Nous utiliserons cette notation par la suite.**

Troisième exemple. Considérons la fonction $f(x) := \sin x$. Par définition la différentielle en $x = a$ est $df = d(\sin x) = \cos a \cdot dx$. De façon usuelle la valeur courante de la variable x pour laquelle on calcule la différentielle n'est pas notée a mais tout simplement x . On écrit donc $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$ ou plus généralement

$$\boxed{df = f'(x) \cdot dx} \quad (4.3)$$

En divisant les deux membres de l'égalité précédente par dx nous retrouvons la notation déjà employée

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

mais alors qu'au paragraphe sur les dérivées (relation 4.1) la notation $\frac{df}{dx}$ ne représentait qu'une écriture commode, ici c'est devenu le rapport df / dx de deux différentielles.

4.6.2 Représentation graphique.

La différentielle et la variation d'une fonction au voisinage de $x = a$ peuvent être interprétées graphiquement (fig. 4.27).

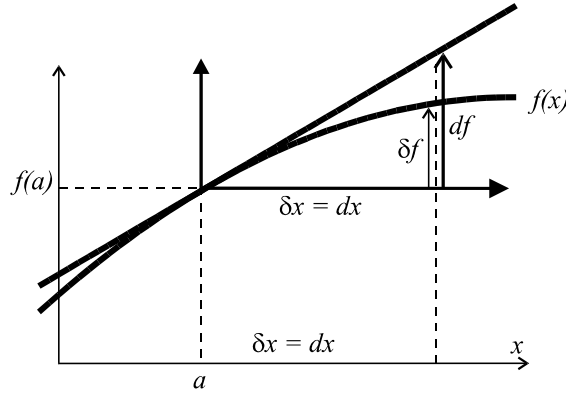


fig. 4.27 : Différentielle df , et variation δf .

Sur la figure précédente il est aisé de saisir la raison pour laquelle df et δf sont voisins lorsque $\delta x = dx$ est assez petit.

Nous reviendrons sur ce point plus loin.

4.6.3 Dérivée d'une fonction de fonction.

Considérons une grandeur physique F , fonction de la variable u : $F = f(u)$. Supposons que u soit une fonction de la variable t . La grandeur F peut alors être considérée comme une fonction de t : $F = \varphi(t) := f[u(t)]$.

La relation 4.3 conduit aux relations suivantes $dF = \frac{dF}{dt} dt = \frac{dF}{du} du$. L'écriture $\frac{dF}{dt}$ signifie que F est considéré comme une fonction de t : $\frac{dF}{dt} := \frac{d\varphi}{dt}$ tandis que $\frac{dF}{du}$ signifie que F est considéré comme une fonction de u : $\frac{dF}{du} := \frac{df}{du}$.

Cependant u est une fonction de t ; on écrit $du = \frac{du}{dt} dt$.

Il vient donc $dF = \frac{dF}{du} \cdot du = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt} dt$, cependant $dF = \frac{dF}{dt} dt$; par conséquent

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dt}} \quad \text{soit encore} \quad \frac{d}{dt} f[u(t)] = u' \left(\frac{df}{du} \right)_{u(t)}$$

Pour calculer la dérivée de F en $t = t_0$, chacune de ces quantités doit être calculées en $t = t_0$ et donc avec $u = u(t_0)$.

L'emploi des différentielles donne une grande souplesse d'écriture lorsqu'on utilise les grandeurs (F) de préférence aux fonctions (f et φ). C'est généralement l'usage en physique.

4.6.4 Petites variations.

Lorsque $dx = \delta x$ est "assez" petit, nous admettons la relation

$$\boxed{\delta f \simeq df := \left(\frac{df}{dx} \right)_a dx}$$

Cette approximation est équivalente à celle qui consiste à identifier la fonction f à son développement de Taylor du premier ordre ou à identifier le graphe de f à sa tangente en $x = a$. Justifions cette approximation sur un exemple.

Exemple. L'aire d'un cercle de rayon x est $A = \pi x^2$. Lorsque x varie de r à $r + \delta r$, l'aire du cercle subit la variation δA représentée par l'anneau circulaire gris de la figure 4.28.

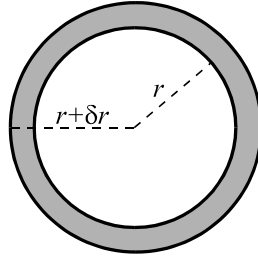


fig. 4.28 :
 $dA = 2\pi r dr$.

La différentielle de A est $dA = 2\pi x dx$. Sa valeur pour $x = r$ et $dx = \delta r$ est $dA = 2\pi r \delta r$. La variation de A est $\delta A = \pi (r + \delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \delta r + \pi \delta r^2$. Le terme $2\pi r \delta r$ est du premier degré relativement à δr ; on dit que c'est **un terme du premier ordre**; $\pi \delta r^2$ est du second degré relativement à δr : c'est **un terme du second ordre**. En posant $\delta f \simeq df$ on commet l'erreur $e = \pi \delta r^2$: **l'erreur est du second ordre**. Lorsque δr est petit ($\delta r \ll r$), l'erreur relative est $\frac{\delta r}{2r} \ll 1$. Elle est négligeable et tend vers zéro avec δr .