Chapitre 5
PRIMITIVES ET INTÉGRALES

5.1 Définitions et exemples

Soient deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ de la variable x. On dit que F est une ***primitive*** de f si $f = \dfrac{dF}{dx}$.

Par exemple $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x$. On dira que $\sin x$ est une primitive de $\cos x$

$$\boxed{F = \text{ primitive de } f \Leftrightarrow F\,'(x) := \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$$

Les primitives, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ d'une même fonction $f(x)$ diffèrent d'une constante

$$\boxed{F_2(x) - F_1(x) = C}$$

où C est une constante arbitraire.

En outre on vérifie aisément les relations

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} U(x) = \text{ primitive de } u(x) \\ V(x) = \text{primitive de } v(x) \\ a = \text{ constante} \end{array}\right\} \Longrightarrow U + a\,V = \text{ primitive de } (u + a\,v)}$$

Les tableaux ci-dessous donnent une primitives des fonctions usuelles

Fonction $f =$	a	x^n $(n \neq -1)$	$x^{1/2} = \sqrt{x}$	$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$
Primitive de $f =$	ax	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{2}{3}\,x\,\sqrt{x}$	$\ln\lvert x\rvert$

Fonction $f =$	e^{ax}	$\dfrac{u\,'}{u}$	$\ln\lvert x\rvert$
Primitive de $f =$	$\dfrac{1}{a}\,e^{ax}$	$\ln\lvert u\rvert$	$x\,\ln\lvert x\rvert - x$

Fonction $f =$	$\sin(ax)$	$\cos(ax)$	$\tan(ax) = \dfrac{\sin(ax)}{\cos(ax)}$
Primitive de $f =$	$\dfrac{-1}{a}\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax)$	$\dfrac{-1}{a}\ln\lvert\cos(ax)\rvert$

5.2 Intégrale définie

Considérons la fonction $f(x)$ et les deux valeurs $x = a$ et $x = b$. L'intervalle $[a, b]$ est divisé en n intervalle élémentaires dont les extrémités sont :
$x_0 = a$, $x_1 = a + \delta x$, ..., $x_k = a + k\,\delta x$, ..., $x_n = a + n\delta x = b$ avec $\delta x = (b - a)/n$.

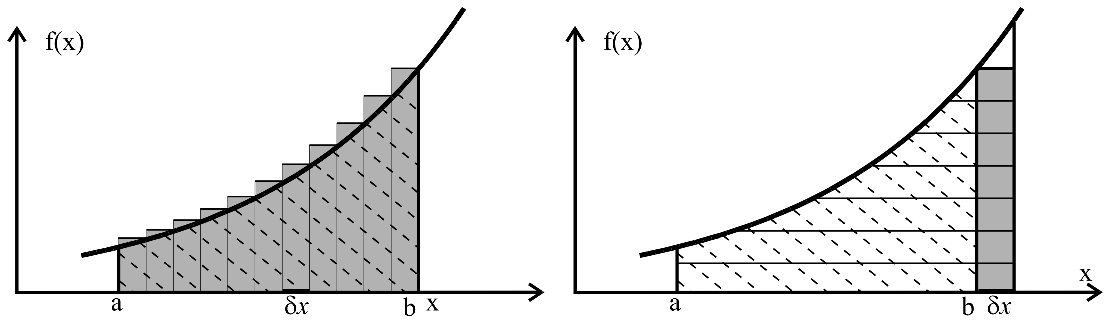

fig. 5.1

Nous considérons $I_n = f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + ... = \sum f(x_k)\delta x$. La somme I_n représente l'aire grise des rectangles de la première figure 5.1. Lorsque $n \to \infty$ (c'est à dire $\delta x \to 0$) l'aire grise se confond avec l'aire hachurée de la figure 5.1, comprise entre le graphe de $f(x)$ et l'axe des x. Cette limite est **l'intégrale définie** $I = \int_a^b f(x)dx$.

Remarquons que **le nom de la variable d'intégration est indifférent** :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = ...$$

- Supposons que f soit une combinaison linéaire des fonctions $g(x)$ et $h(x)$, c'est à dire $f(x) = g(x) + \lambda\,h(x)$ où λ est une constante. Il vient
$I_n = \sum f(x_k)\delta x = \sum g(x_k)\delta x + \lambda \sum h(x_k)\delta x$. A la limite $n \to \infty$ on trouve

$$\boxed{\int_a^b (g + \lambda\,h)_{(t)}\;dt = \int_a^b g(t)\,dt + \lambda \int_a^b h(t)\,dt}$$

- Sur la figure 5.1 nous avons considéré le cas $b > a$. Lorsque $b < a$ la quantité δx change de signe alors que les valeurs de $f(x_k)$ restent inchangées, ce qui implique

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt \quad \text{et donc} \quad \int_a^a f(t)\,dt = 0}$$

- En outre, si on introduit un troisième point d'abscisse c, on vérifie graphiquement la relation

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt}$$

valable quelle que soit la position relative des points d'abscisse a, b et c.

Lorsque la fonction $f(x)$ ne conserve pas un signe constant, certains termes de la somme I_n sont positifs, d'autres sont négatifs. L'aire I apparaît donc comme une aire algébrique.

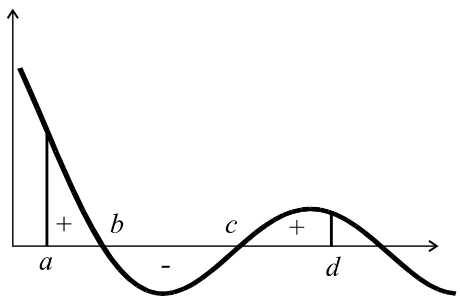

fig. 5.2

L'intégrale $\int_a^d f(x)\,dx$ où $f(x)$ est représentée sur la figure 5.2, se décompose en une somme de trois intégrales : $\int_a^d = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d$. Considérant la série I_n qui approxime chacune des intégrales on obtient les relations $\int_a^b f(x)\,dx > 0$,
$\int_b^c f(x)\,dx < 0$ et $\int_c^d f(x)\,dx > 0$.

Sur la figure 5.3 nous représentons divers cas possibles pour le signe de $\int_a^b f(x)\,dx$.

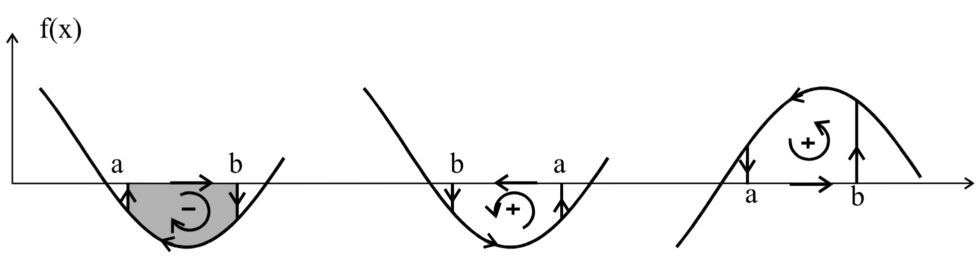

fig. 5.3

Dans le premier cas, $f(x) < 0$ et $b > a$ (l'axe des x est décrit dans le sens positif indiqué par la flèche sur l'axe). L'intégrale est négative. Ce résultat apparaît clairement en considérant le signe des termes des séries I_n. Cette intégrale représente l'aire algébrique de la surface grise. Le contour qui borde cette surface est orienté par continuité à partir de la flèche sur l'axe des x. L'orientation est rétrograde (sens des aiguilles d'une montre*). Cette orientation fixe le signe de l'intégrale. On vérifie aisément dans les deux autres cas que l'orientation du bord est celle du sens direct ; les intégrales correspondantes sont positives.

On peut considérer que b, borne supérieure de l'intégrale est une variable, x (fig.5.1). Dans ce cas l'intégrale est une fonction de x : $\boxed{\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt}$. Il serait

*Un montre à aiguille "normale".

maladroit ici de noter la variable d'intégration du même nom que la borne supérieure ; nous employons donc t pour la désigner.

N.B. La borne supérieure, x, peut être plus grande ou plus petite que la borne inférieure a. La fonction $\Phi(x)$ peut être positive ou négative.

La dérivée de $\Phi(x)$ en $x = b$ est la limite de $\left(\Phi(x+\delta x) - \Phi(x)\right)/\delta x$ lorsque $\delta x \to 0$. La différence entre les deux aires hachurées de la second figure 5.1 est précisément la quantité $\Phi(x+\delta x) - \Phi(x)$. C'est pratiquement l'aire $f(b)\,\delta x$ du rectangle gris (à la limite $\delta x \to 0$). Par conséquent $\Phi\,'(b) = f(b)$:

$$\boxed{\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}}$$

$\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ est donc <u>une</u> primitive de $f(x)$. C'est <u>la</u> primitive telle que $\Phi(a) = 0$.

Considérons une primitive quelconque $F(x)$ de $f(x)$: $F(x) = \Phi(x) + C$ où C est une constante.

Formons $F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

De la relation $\Phi(a) = 0$ on déduit $F(b) - F(a) = \Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt$:

$$\boxed{\boxed{F(x) = \text{une primitive de } f(x) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}}$$

$F(b) - F(a)$ est donc l'intégrale définie de f sur l'intervalle $(a,\, b)$. On utilise généralement la notation $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.

<u>Premier exemple</u>. Calculons l'aire comprise entre un arc de sinusoïde et l'axe des x. Plus précisément calculons $A = \int_0^\pi \sin x\,dx$. Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$. On écrit $A = [-\cos x]_0^\pi := (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$.

<u>Second exemple</u>. Nous voulons calculer le moment d'inertie d'une barre homogène, par rapport à son extrémité. La barre est homogène, sa masse est M et sa longueur L. Nous décomposons la barre en éléments de longueur $d\ell$.

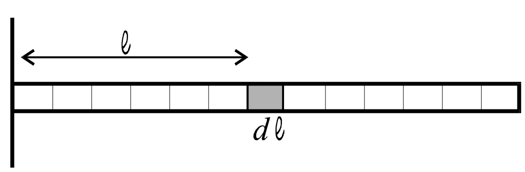

fig. 5.4

Pour calculer le moment d'inertie, I, il faut (par définition) sommer toutes les quantités $\ell^2\,dm$ où dm est la masse de l'élément de longueur $d\ell$. La barre étant homogène il vient $dm = M \cdot d\ell/L$.

$$I = \int_0^L \ell^2 \frac{M}{L} d\ell = \frac{M}{L}\left[\frac{\ell^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3} M L^2$$

5.3 Méthodes d'intégration

Une primitive quelconque de la fonction f est notée $\int f(x)dx$, c'est une " ***intégrale indéfinie*** ".

Par exemple $\int e^x\,dx = e^x + C$ (C désigne une constante appelée ***constante d'intégration***).

Il n'est pas toujours possible d'exprimer une intégrale indéfinie sous la forme d'une combinaison de fonctions connues. Ainsi $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx$ définit une nouvelle fonction qui ne s'exprime pas au moyen des fonctions usuelles (polynômes, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc.). C'est une fonction notée $\operatorname{Arctan} x = y$ telle que $y \in (-\pi, +\pi)$ et satisfait la relation $\tan y = x$. La fonction Arctan est donc la fonction inverse de la fonction tan.

Plusieurs méthodes permettent l'intégration des fonctions simples nous les résumons rapidement.

5.3.1 Les tables et les ordinateurs.

Il existe des livres qui donnent les primitives connues des fonctions simples ; ce sont des " tables d'intégrales". Ces mêmes tables fournissent également la valeur numérique des intégrales définies remarquables comme $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Aujourd'hui nous disposons de logiciels puissants, d'utilisation commode, qui permettent de trouver (au moyen d'un ordinateur) la réponse à la plupart des problèmes d'intégration connus.

L'essentiel de l'effort doit donc porter sur la formulation des problèmes, sur la nature des réponses cherchées plus que sur les techniques de résolution elles même. Les méthodes élémentaires doivent néanmoins être connues.

5.3.2 La simplification du problème.

On utilise directement la relation

$$\int \left(\frac{df}{dx}\right) dx := \boxed{\int df = f(x) + C} \tag{5.1}$$

après avoir simplifié l'expression sous le signe $\int$.

Premier exemple. Soit à calculer $I = \int \tan^2 x\,dx$.

On sait que $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$, on en déduit $I = \displaystyle\int \left(\frac{d}{dx}\tan x - 1\right) dx$ soit $I = \int d(\tan x - x)$; d'où la solution $I = \tan x - x + C$.

Second exemple. $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$.

On écrit $\dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x^2-1} = 1 + \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$.

On peut démontrer que toute fraction rationnelle de la forme $Q = \dfrac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$ s'écrit encore $Q = \dfrac{A_1}{(x-a_1)} + \dfrac{A_2}{(x-a_2)} + .. + \dfrac{A_n}{(x-a_n)}$ où A_k est une constante. Dans le cas présent, il vient $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$.

Par conséquent

$I = \displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right) dx = x + \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + C$ soit encore $I = x + \ln\sqrt{\dfrac{|x-1|}{|x+1|}} + C$.

5.3.3 L'intégration par partie.

Démontrons la relation

$$\int_a^X u\,dv = [uv]_a^X - \int_a^X v\,du \tag{5.2}$$

où u et v sont des fonctions de la variable x. Par conséquent $du = \dfrac{du}{dx}\,dx$ et $dv = \dfrac{dv}{dx}\,dx$.

Nous utilisons la relation $\dfrac{d}{dx}\,(u\,v) = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$, il vient

$[uv]_a^X = \int_a^X \dfrac{d}{dx}\,(u\,v)\;dx = \int_a^X v\dfrac{du}{dx}\,dx + \int_a^X u\dfrac{dv}{dx}\,dx = \int_a^X v\,du + \int_a^X u\,dv$ ce qui conduit à l'expression 5.2.

La relation 5.2 est généralement écrite sous la forme

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du} \tag{5.3}$$

<u>Premier exemple</u>. Calculons $\int t\,e^t\,dt$. Nous posons $u = t$ et $dv = e^t dt$. Il vient donc $du = dt$ et $v = e^t$.

La relation 5.3 s'écrit alors $\int t\;(e^t\,dt) = t\,e^t - \int e^t\,dt = t\,e^t - e^t + C$.

<u>Second exemple</u>. Calculons $\int t^2\,e^t dt$. Nous posons $u = t^2$ et $e^t\,dt = dv$ soit $du = 2tdt$ et $v = e^t$. Il vient donc $\int t^2\,e^t dt = t^2 e^t - \int 2te^t dt = t^2 e^t - 2\,(t\,e^t - e^t) + C$

5.3.4 Le changement de variable.

Le changement de variables est la méthode que l'on rencontre le plus souvent ; c'est donc la méthode la plus importante.

Démontrons la relation suivante

$$\boxed{F(x) := \int f(x)\cdot dx \Rightarrow F(g\,[u]) = \int f(g\,[u])\cdot\left(\tfrac{dg}{du}\right)_u du} \tag{5.4}$$

La définition de F implique $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$ ou encore $\dfrac{dF}{dg} = f(g)$, avec le changement de notation $x \to g$.

Si g est une fonction de u il vient $\left(\dfrac{dF}{du}\right)_u = \left(\dfrac{dF}{dg}\right)_{g(u)}\cdot\left(\dfrac{dg}{du}\right)_u$ d'où $\left(\dfrac{dF}{du}\right)_u = f(g\,[u])\cdot\left(\dfrac{dg}{du}\right)_u$ ce qui signifie que F, considérée comme une fonction de u (c'est à dire $F(g\,[u])$) est une primitive de $f(g\,[u])\left(\dfrac{dg}{du}\right)_u$. C'est précisément le sens de la seconde égalité dans 5.4.

<u>Premier exemple</u>. Soit à calculer $I = \int \ln x\;dx := \int f(x)dx$.

Posons $x := g(u) := e^u$. Il vient $f(x) := \ln x = \ln(e^u) = u = f(g\,[u])$ et $dx = \left(\dfrac{dg}{du}\right)du = e^u\,du$.

On obtient $I = \int f(g\,[u])\left(\dfrac{dg}{du}\right)_u du = \int ue^u\,du$. Cette intégrale a été calculée au paragraphe précédent : $I = u\,e^u - e^u + C$. La relation $x = e^u \Leftrightarrow u = \ln x$ conduit à la solution $I = \ln x\cdot x - x + C$.

Plutôt que la formule 5.4 **il est important de retenir la méthode mise en oeuvre**.

Pour intégrer $F(x) := \int f(x)\, dx$

1. nous avons posé $x = g(u)$ (où de façon équivalente $u = h(x)$ où h et g sont les fonctions inverses l'une de l'autre),

2. nous avons traité dx comme une différentielle et nous avons exprimé $f(x)\, dx$ en fonction de u et du, nous avons donc posé $f(x)\, dx = f(g\,[u]) \left(\dfrac{dg}{du}\right) du := \varphi(u)\, du$,

3. nous avons intégré $\int \varphi(u)\, du = \Phi(u)$,

4. nous avons exprimé u en fonction de x : $F(x) = \Phi\,[h(x)]$.

<u>Second exemple</u>. Soit à calculer $F(x) := \int x\, e^{-x^2} dx$.

1. Posons $x^2 = u$.
2. Dans ces conditions $du = 2x\, dx$ et $x\, e^{-x^2} dx = \dfrac{1}{2} e^{-u} du\ \big(= \varphi(u)\, du\big)$.
3. Il vient $F = \int \dfrac{1}{2} e^{-u} du = \dfrac{-1}{2} e^{-u} + C$.
4. Nous exprimons u en fonction de x. Nous obtenons $F = \dfrac{-1}{2} e^{-x^2} + C$.

Pour conclure, soulignons que les calculs d'intégration sont parfois fastidieux tandis que les outils informatiques donnent immédiatement la solution dans la plupart des cas usuels. Cependant, si l'informatique peut résoudre les problèmes liés aux techniques de calcul, les questions conceptuelles restent essentielles. L'informatique permet d'aller très vite et d'éviter les erreurs de calcul mais ignorer ce qu'est une dérivée partielle, une intégrale, une asymptote ne permet même pas de comprendre la nature des questions qui se posent ni, *a fortiori*, d'imaginer ce que peuvent en être les réponses.

Avec ou sans outils informatiques, le problème à traiter doit être bien formulé et l'objectif du calcul clairement défini. En outre, il ne faut pas perdre de vue que le travail d'un ordinateur doit être contrôlé.

La connaissance des méthodes courantes, la capacité à résoudre des problèmes simples font partie d'une culture scientifique indispensable.

Chapitre 6
LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les équations différentielles sont des équations reliant une ou plusieurs fonctions avec leurs dérivées. Elles apparaissent dans la plupart des problèmes étudiant les variations d'une quantité, par exemple par rapport au temps (évolution de populations, mouvement d'un ressort ou d'un solide, décroissance radioactive d'un élément) ou par rapport à une longueur (absorption des rayonnements par la matière). Nous allons nous intéresser à quelques équations différentielles particulières. On appelle ordre d'une équation différentielle le degré de dérivation de la fonction dans l'équation : une équation du premier ordre concerne une fonction et sa dérivée ; une équation du deuxième ordre concerne la fonction, sa dérivée et sa dérivée seconde. On qualifie ces équations de linéaires lorsqu'elles sont des combinaisons linéaires de la fonction et de ses dérivées. Nous allons ainsi voir les techniques usuelles pour résoudre deux types d'équations différentielles.

NB : Nous allons considérer des équations différentielles à coefficients réels. Dans certains cas, les méthodes employées sont aussi valables si les coefficients sont complexes.

6.1 Equations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants

Les équations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{df}{dx} + a\ f(x) = g(x)$$

Avec a constante réelle connue et g une fonction connue de x. Nous cherchons à déterminer la fonction $f(x)$.

La méthode de résolution de cette équation suit, en général, deux étapes.

6.1.1 Résolution de l'équation sans second membre

Ce que l'on appelle l'équation sans second membre correspond au cas où $g(x) = 0$.

$$\frac{df_0}{dx} + a\ f_0(x) = 0$$

Les solutions de ce type d'équation s'obtiennent de la façon suivante :

$$\frac{df_0}{dx} = (-a)\ f_0(x) \Longrightarrow f_0(x) = Ce^{-ax}$$

C est une constante réelle, elle peut prendre a priori n'importe quelle valeur. La solution $f_0(x)$ n'est donc pas unique. Si l'on donne une indication supplémentaire, par exemple la valeur de $f_0(x)$ pour une valeur donnée de x, alors il est possible de fixer la valeur de la constante C.

6.1.2 Résolution de l'équation avec second membre

Pour résoudre l'équation complète :

$$\frac{df}{dx} + a\ f(x) = g(x)$$

nous allons nous inspirer du résultat précédent. Plus précisément, on montre qu'il est possible de rechercher les solutions en les écrivant de la forme :

$$f(x) = C(x)\ e^{-ax}$$

Ici, $C(x)$ n'est plus une constante, mais une fonction de la variable x. Cette méthode est appelée méthode de la variation de la constante et est valide dans ce cas particulier. Il s'agit en fait d'un changement de fonction dans le but de nous simplifier les calculs : nous recherchons donc l'expression de $C(x)$ dont découlera l'expression de $f(x)$.

Nous avons donc

$$\frac{df}{dx} = \frac{dC}{dx}\ e^{-ax} - a\ C(x)\ e^{-ax}$$

En remplaçant l'expression de f et de $\dfrac{df}{dx}$ dans l'équation différentielle, nous obtenons

$$\frac{df}{dx} + a\ f(x) = \frac{dC}{dx}\ e^{-ax} - a\ C(x)\ e^{-ax} + a\ C(x)\ e^{-ax} = g(x)$$

Soit encore

$$\frac{dC}{dx}\ e^{-ax} = g(x) \Longrightarrow \frac{dC}{dx} = g(x)\ e^{ax}$$
$$C(x) = \int g(x)\ e^{ax} dx + K$$
$$f(x) = C(x)\ e^{-ax} = \left(\int g(x)\ e^{ax} dx + K \right)\ e^{-ax}$$

A condition, bien sûr, que la primitive $\displaystyle\int g(x)\ e^{ax} dx$ existe, K est alors une constante réelle. K peut prendre n'importe quelle valeur à priori. Comme pour l'équation sans second membre, si l'on donne une indication supplémentaire, il est alors possible de déterminer la valeur de K.

<u>Exemple</u> : $\dfrac{df}{dx} - 2\ f(x) = 5\ e^{x}$

Dans un premier temps, il faut donc résoudre l'équation sans second membre, puis suivre la méthode de la variation de la constante.

Equation sans second membre :

$$\frac{df_0}{dx} - 2\ f_0(x) = 0 \Longrightarrow f_0(x) = Ce^{2x}$$

f_0 nous indique quelle forme doivent prendre les solutions de l'équation différentielle avec second membre

$$f(x) = C(x)\ e^{2x}$$

On a alors

$$\frac{df}{dx} = \frac{dC}{dx}\ e^{2x} + 2\ C(x)\ e^{2x}$$
$$\frac{df}{dx} - 2\ f(x) = \frac{dC}{dx}\ e^{2x} + 2\ C(x)\ e^{2x} - 2C(x)\ e^{2x} = \frac{dC}{dx}\ e^{2x} = 5\ e^{x}$$

Soit

$$\frac{dC}{dx} = 5\ e^{-x} \Longrightarrow C(x) = \int 5\ e^{-x} dx + K = -5\ e^{-x} + K$$

Nous avons ainsi les solutions de l'équation différentielle

$$f(x) = C(x)\ e^{2x} = (-5\ e^{-x} + K)\ \ e^{2x} = -5\ e^{x} + K\ e^{2x}$$

6.2 Equations différentielles du deuxième ordre, linéaires, à coefficients constants

Une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants peut toujours s'écrire

$$a\ \frac{d^2 f}{dx^2} + b\ \frac{df}{dx} + c\ f(x) = g(x)$$

avec a réel non-nul, b et c réels fixés et $g(x)$ fonction connue de la variable x.

6.2.1 Résolution de l'équation sans second membre

Ce que l'on appelle l'équation sans second membre correspond au cas où $g(x) = 0$.

$$a\ \frac{d^2 f_0}{dx^2} + b\ \frac{df_0}{dx} + c\ f_0(x) = 0$$

On montre que les solutions peuvent s'écrire de la forme

$$f_0(x) = C\ e^{rx}$$

où C est une constante réelle. Recherchons les valeurs de r.

$$\frac{df_0}{dx} = r\ C\ e^{rx}$$
$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} = r^2 C\ e^{rx}$$

Cela nous donne

$$a\ \frac{d^2 f_0}{dx^2} + b\ \frac{df_0}{dx} + c\ f_0(x) = \left(a\ r^2 + b\ r + c\right) C\ e^{rx} = 0$$
$$\Longrightarrow \boxed{a\ r^2 + b\ r + c = 0}$$

Cette dernière équation du deuxième degré est appelée "équation caractéristique" de l'équation différentielle. Nous avons vu comment résoudre une telle équation. Trois cas peuvent se présenter : suivant le signe du discriminant : $\Delta := b^2 - 4ac$ l'équation caractéristique peut avoir deux racines réelles, une racine double réelle ou deux racines complexes. Examinons chaque cas.

– *Le discriminant est positif* : l'équation caractéristique a deux racines réelles que nous appelons r_1 et r_2.

On peut montrer alors que la solution générale de l'équation différentielle sans second membre est la combinaison linéaire des solutions correspondant à chacune des racines obtenues

$$f_0(x) = C_1\ e^{r_1 x} + C_2\ e^{r_2 x}$$

C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitraires, c'est-à-dire, pouvant a priori prendre n'importe quelle valeur sauf si l'on fixe deux valeurs particulières de la fonction $f_0(x)$.Suivant le signe de r_1 et r_2, la solution de l'équation différentielle est donc une fonction exponentielle croissante ou décroissante ou encore une combinaison des deux.

- *Le discriminant est nul* : l'équation caractéristique a une racine double réelle que nous appelons r_0.

On peut montrer alors que la solution générale de l'équation différentielle sans second membre est

$$f_0(x) = (C_0\ x + C_0')\ e^{r_0 x}$$

C_0 et C_0' sont des constantes réelles arbitraires, c'est-à-dire, pouvant a priori prendre n'importe quelle valeur sauf si l'on fixe deux valeurs particulières de la fonction $f_0(x)$.

- *Le discriminant est négatif* : l'équation caractéristique a deux racines complexes que nous appelons $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha + i\beta$ (α et β sont des réels).

Comme dans le cas des racines réelles, on peut montrer alors que la solution générale de l'équation différentielle sans second membre est la combinaison linéaire des solutions correspondant à chaque des racines obtenues

$$f_0(x) = C_1\ e^{z_1 x} + C_2\ e^{z_2 x} = C_1\ e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2\ e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(C_1\ e^{i\beta x} + C_2\ e^{-i\beta x}\right)$$

En utilisant la formule de Moivre, on obtient

$$f_0(x) = e^{\alpha x}\left(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x\right)$$

Ce qui peut aussi se mettre sous la forme

$$f_0(x) = \Gamma e^{\alpha x} \cos\left(\beta x + \varphi\right)$$

où $\Gamma = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ et $\tan\varphi = -\dfrac{K_2}{K_1}$

Il faut choisir la forme de la solution que l'on préfère ; on définit alors, suivant le cas, un couple (C_1, C_2) ou (K_1, K_2) ou (Γ, φ) de constantes réelles arbitraires, c'est-à-dire, pouvant a priori prendre n'importe quelle valeur que l'on peut fixer avec deux valeurs particulières de la fonction $f_0(x)$.

6.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Nous cherchons à résoudre l'équation complète

$$a\ \frac{d^2 f}{dx^2} + b\ \frac{df}{dx} + c\ f = g(x)$$

On peut montrer que cette équation admet une solution générale $f(x)$ qui est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre $f_0(x)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $f_p(x)$.

$$f(x) = f_0(x) + f_p(x)$$

Dans la plupart des cas, cette solution particulière est de même type que le second membre de l'équation lui-même.

Au final, tous les solutions d'une équation différentielle du deuxième ordre comprennent deux constantes arbitraires, de même qu'il y a une constante arbitraire dans toute solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Exemple : Nous cherchons les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - 5\frac{df}{dt} + 6\ f = 50 \cos 4t$$

Nous pouvons remarquer que le second membre de l'équation est un cosinus. Ce genre d'équation est souvent rencontré dans les problèmes liés aux oscillateurs et ondes. Dans ce genre de problème, le coefficient devant f est une fréquence au carré, c'est la fréquence propre de l'oscillateur et le coefficient devant la dérivée de f est proportionnel à l'amortissement ou au frottement que subit le système.

Recherchons les solutions de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 f_0}{dt^2} - 5\frac{df_0}{dt} + 6\ f_0 = 0$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Le discriminant est égal à 1 ($\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$)
Il y a donc deux racines réelles : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$
Nous obtenons donc

$$f_0(x) = C_1\ e^{2t} + C_2\ e^{3t}$$

Ce sont toutes les solutions de l'équation sans second membre. Nous n'avons pas d'autre élément pour fixer les valeurs des constantes C_1 et C_2 qui restent donc arbitraires.

Remarque : Dans un problème de physique, les solutions exponentielles croissantes (comme celles que nous obtenons) ne sont généralement pas réalistes. Cet argument suffit souvent à en déduire que les constantes sont nulles. D'une autre côté, si nous avions obtenu des exponentielles décroissantes, nous aurions pu dire qu'au bout d'un certain temps, ces solutions deviennent négligeables par rapport à la solution particulière. Au final, des solutions d'une équation différentielle sans second membre dont les racines de l'équation caractéristique sont réelles sont rarement intéressantes du point de vue physique... Cependant nous les gardons pour résoudre notre exemple.

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - 5\frac{df}{dt} + 6\ f = 50 \cos 4t$$

Nous cherchons une solution du même type que le second membre

$$\begin{aligned} f_p(t) &= A\ \cos 4t + B\ \sin 4t \\ \frac{df_p}{dt} &= -4A\ \sin 4t + 4B\ \cos 4t \\ \frac{d^2 f_p}{dt^2} &= -16 \times (A\ \cos 4t + B\ \sin 4t) \end{aligned}$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation différentielle

$$\begin{gathered} -16(A\ \cos 4t + B\ \sin 4t) - 5 \times (-4A\ \sin 4t + 4B\ \cos 4t) + 6 \times (A\ \cos 4t + B\ \sin 4t) \\ = 50 \cos 4t \\ \cos 4t\ \ (-16A - 20B + 6A - 50) = -\sin 4t\ \ (-16B + 20A + 6B) \end{gathered}$$

Cette relation doit être vraie pour toute valeur de t. Les deux parenthèses sont donc nulles.

$$\begin{cases} -16A - 20B + 6A - 50 = -10A - 20B - 50 = 0 \\ -16B + 20A + 6B = -10B + 20A = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation indique que

$$B = 2A$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$\begin{gathered} -10A - 40A - 50 = 0 \\ A = -1 \text{ et } B = -2 \end{gathered}$$

La solution particulière s'écrit donc

$$f_p(t) = -\cos 4t - 2\ \sin 4t$$

Au final, les solutions de l'équation différentielle que nous cherchons s'écrivent

$$f(t) = f_0(t) + f_p(t) = C_1\ e^{2t} + C_2\ e^{3t} - \cos 4t - 2\ \sin 4t$$

avec C_1 et C_2 constantes réelles.

Chapitre 7

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

L'espace a trois dimensions et nécessite donc trois variables (x, y, z) pour le décrire, parfois le temps peut intervenir. Dans de nombreux problèmes en physique, chimie ou biologie, il ne suffit pas de savoir utiliser une fonction à une variable pour pouvoir répondre. La thermodynamique utilise aussi un nombre de variables élevés (pression, température, volume, ...). Nous allons ainsi nous pencher dans ce chapitre sur les fonctions de plusieurs variables. Le cas est beaucoup plus complexe que dans le cas des fonctions d'une variable. En fait, il n'est pas possible de faire une étude complète d'une fonction de plusieurs variables de façon directe. Il faut aborder les propriétés de la fonction suivant différentes approches, par exemple en fixant la valeur de certaines variables ou en faisant des diagrammes 2D ou 3D. Nous allons donc voir quelques outils pour pouvoir utiliser et décrire ces fonctions.

7.1 Dérivée

7.1.1 Dérivée partielles du premier ordre.

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$. Dans un système d'axes orthonormés $\{Ox, Oy, Oz\}$, nous considérons le point de coordonnées $\{x, y, 0\}$ du plan xOy. En ce point, parallèlement à Oz, nous portons le point M de cote $z = f(x, y)$. Lorsque x et y varient, le point M décrit la surface S.

Les **"lignes de niveau"** sont les courbes dans le plan xOy telles que $f(x, y) = z_0$, z_0 étant une constante définissant la ligne de niveau. L'usage le plus courant des lignes de niveau est la représentation de l'altitude du relief sur une carte géographique. Une ligne de niveau est aussi l'intersection de la surface S avec le plan $z = z_0$.

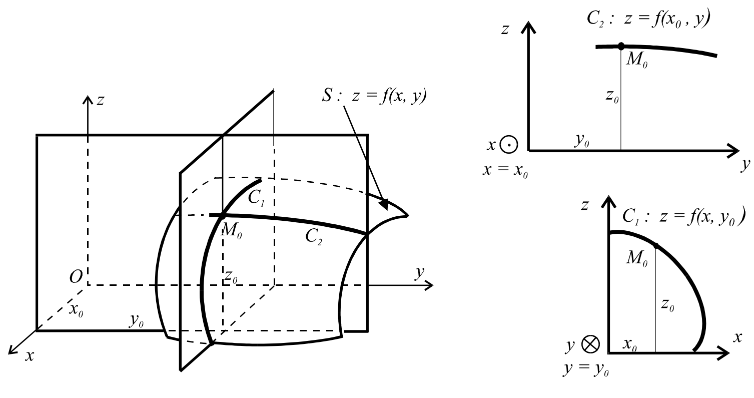

fig. 7.1

Considérons le point M_0 de coordonnées $x_0,\ y_0,\ z_0 := f(x_0, y_0)$. Coupons la surface S par le plan parallèle au plan xOz qui passe par M_0. L'intersection est la courbe C_1. Les points de C_1 ont tous la même ordonnée y_0. Leur cote, z, dépend de leur abscisse $x : z = f(x, y_0)$. On peut dériver cette fonction de x; on obtient la **"dérivée partielle"** de f par rapport à x. Cette dérivée partielle est notée $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y_0)}$; c'est une fonction de x seulement car y_0 est fixé. On peut cependant, **après avoir calculé la dérivée partielle,** considérer que y_0 peut prendre une valeur arbitraire y. On obtient alors une fonction des deux variables x et y : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)}$ que l'on note plus simplement $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

De même, on peut définir la fonction $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

<u>Exemple 1</u> : L'aire d'un rectangle de côtés x et y s'écrit $z = x \cdot y$, c'est une fonction des deux variables x et y.

Considérons y comme une donnée. La fonction z est alors une fonction de x dont on peut calculer la dérivée. La dérivée partielle de z par rapport à x est $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$.

Et la dérivée partielle de z par rapport à y : $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$.

<u>Exemple 2</u> : Soit $f(x, t) := x \cdot \cos(\omega t/2)$.

Pour calculer $\partial f/\partial x$, nous considérons t comme un paramètre constant et nous dérivons la fonction de $x : x \mapsto \Phi(x) := f(x, t)_{t=cte}$. Il vient $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)$.

Pour calculer $\partial f/\partial t$, nous considérons x comme un paramètre constant et nous dérivons la fonction de $t : t \mapsto \Psi(t) := f(x, t)_{x=cte}$. On trouve $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{\omega}{2} \cdot x \cdot \sin\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)$.

Donnons nous les valeurs $x_0 = a$ et $t_0 = \dfrac{\pi}{2\omega}$. On obtient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,t_0)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{(x_0,t_0)} = -\frac{\omega}{2} a \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\, a\, \omega$$

7.1.2 Dérivées partielles d'ordre supérieurs à 1.

Etant donnée une fonction de deux variables, $f(x, y)$, les dérivées partielles du premier ordre $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ sont des fonctions des deux variables x et y. On peut les dériver à leur tour. On obtient les dérivées partielles du second ordre. Il y en a quatre. Nous en donnons la liste ci-dessous

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ , \quad & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ , \quad & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

<u>Exemple</u> : Soit $f(x, y) := x^2 \sin y$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin y\ , \quad & \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \sin y\ , \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^2 \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2x \cos y\ , \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x \cos y\ , \end{aligned}$$

On remarque que $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}$. Cette propriété, connue comme le "**lemme de Schwartz"**, est très généralement vérifiée pour la plupart des fonctions que l'on rencontre en physique*. Selon ce lemme, l'ordre dans lequel on effectue les dérivations est sans importance.

On peut continuer à dériver et calculer les dérivées du troisième ordre :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0\ ,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2\cos y\ ,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -2x \sin y\ ,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -x^2 \cos y,\ etc$$

On remarquera les égalités $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, ce qui est une conséquence du lemme de Schwartz appliqué à f et à ses dérivées.

Dans le calcul d'une dérivée partielle d'ordre quelconque d'une fonction suffisamment régulière, **le résultat ne dépend pas de l'ordre des dérivations**.

7.1.3 Généralisation et dimensions physiques.

Les résultats précédents se généralisent aux fonctions de plusieurs variables en nombre quelconque. Si ces fonctions sont suffisamment régulières, leurs dérivées partielles peuvent être calculées à un ordre arbitraire et ces dérivations peuvent être effectuées dans un ordre quelconque.

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la limite du rapport $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ lorsque δx tend vers zéro, les autres variables restant constantes. Les dimensions physiques de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ sont donc les mêmes.

Premier exemple. La grandeur f est la pression atmosphérique dont la valeur dépend de la position du point considéré dans l'atmosphère : $f = f(x, y, z)$. La pression s'exprime en Pa (soit en $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$). Les variables x, y, z s'expriment en m. Les dérivées premières de f s'expriment donc en $\mathrm{Pa\,m^{-1}}$ (soit en $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-2}}$). Les dérivées secondes sont les dérivées des dérivées premières. Elles s'expriment donc en $\left(\mathrm{Pa\,m^{-1}}\right)\mathrm{m^{-1}} = \mathrm{Pa\,m^{-2}}$. De façon générale les dérivées d'ordre n s'expriment en $\mathrm{Pa\,m^{-n}}$.

Dans l'expression $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} ...} := D$ il faut considérer la notation $\partial^n f$ comme la variation d'une variation d'une variation d'une etc... d'une variation de f, c'est à dire comme une grandeur de mêmes dimensions que f tandis que la notation $\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} ...$ doit être considérée comme un produit de variations $(\delta x)^{n_1}\ (\delta y)^{n_2}$ .....

On remarquera que la somme $n_1 + n_2 + ...$ est égale à l'ordre de variation n. La dimension physique de D est donc la même que celle de $\dfrac{f}{x^{n_1} \cdot y^{n_2} ...}$.

Second exemple. La température T d'une masse donnée de gaz s'exprime en fonction de sa pression P et de son volume V : $T = T(P, V)$. Quelle est la dimension physique de $\dfrac{\partial^3 T}{\partial V^2\, \partial P}$? Ce sont les mêmes dimensions que celles de $\dfrac{T}{V^2 P}$. Les unités en sont $\mathrm{K\,m^{-6}\,Pa^{-1}} = \mathrm{K\,kg^{-1}\,m^{-5}\,s^2}$.

*Fonctions dérivables deux fois à dérivées continues.

7.2 Différentielle

Considérons $f(x, y, z, t)$, fonction de quatre variables. Soit M_0 l'ensemble des 4 valeurs données (x_0, y_0, z_0, t_0). On définit la différentielle de f, en M_0, de la façon suivante

$$df := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt$$

La différentielle df est une fonction linéaire des 4 variables arbitraires dx, dy, dz et dt tandis que les dérivées partielles sont des constantes calculées en M_0.

La définition se généralise à un nombre quelconque de variables. Dans le cas des fonctions d'une seule variable on retrouve la définition de la section précédente.

On remarquera que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ a mêmes dimensions que f/x tandis que dx a mêmes dimensions que x. Par conséquent $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx$ a mêmes dimensions physiques que f. On en déduit que **la différentielle de f a mêmes dimensions physiques que f**.

Exemple. Soit à calculer la différentielle de $f(x, y) = x^2 y$ en $x_0 = 1,\ y_0 = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy\ ,\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 4\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ ,\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 1\ \Rightarrow \\ df &= 4dx + dy \ \text{ en } M_0(1, 2) \end{aligned}$$

La valeur numérique de df s'obtient alors en remplaçant dx et dy par leur valeur numérique.

Si on ne spécifie pas la valeur numérique de x_0 et y_0 on écrit (en abandonnant l'indice " $_0$ ")

$$df = 2xy\, dx + x^2\, dy$$

et de façon plus générale $f = f(x, y, z, ...) \Rightarrow$

$$\boxed{df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + ...}$$

En physique on est souvent conduit à étudier de petites quantités notées parfois δG ou dG. Ce ne sont pas nécessairement les différentielles d'une fonction. Mais lorsque dG est la différentielle d'une fonction, pour insister sur ce point qui s'avère souvent important, on spécifie que c'est **une différentielle totale**.

Etant donnée une forme différentielle

$$\delta G = A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$$

le lemme de Schwartz fournit une condition nécessaire pour que ce soit une différentielle totale. En effet si δG est la différentielle d'une fonction f, alors $A(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $B(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, ce qui implique $\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial A}{\partial y}$. Il en découle la condition

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, y)$$

On peut démontrer que cette condition nécessaire est également suffisante.

Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, les petites variations sont pratiquement égales aux différentielles. Plus précisément soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables. Les variables subissent les variations $x = a \to a+\delta x$, $y = b \to b+\delta y$, $z = c \to c+\delta z$. La fonction f subit alors l'accroissement δf, correspondant :
$f(a, b, c) \to f(a + \delta x, b + \delta y, c + \delta z) := f(a, b, c) + \delta f$.

Lorsque $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, ... sont assez petits, il vient

$$\boxed{\delta f \simeq df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + ...}$$

Premier exemple. Nous voulons calculer $K = 1,1 \cdot \sqrt{4,2}$.

Nous posons $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Ce qui donne $K = f(x, y)$ pour $x = 1,1$ et $y = 4,2$. Il est aisé de calculer $f(a, b)$ pour $a = 1$ et $b = 4$. Nous posons donc $a = 1$, $b = 4$, $dx = 0,1$ et $dy = 0,2$.

$$K = (a + dx)\sqrt{b + dy} = a\sqrt{b} + \delta f \text{ avec } \delta f \simeq df.$$

Le calcul donne $f(a, b) = 2$ et $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{y}}$. Ici il vient $df = \sqrt{b}\,dx + \dfrac{a}{2\sqrt{b}}\,dy = 2dx + 0,25\,dy = 0,2 + 0,05 = 0,25$ d'où $K \simeq 2,25$ (le résultat exact est 2,254...).

Deuxième exemple. L'aire, F, d'un rectangle de côtés x et y est $F = x\,y$.

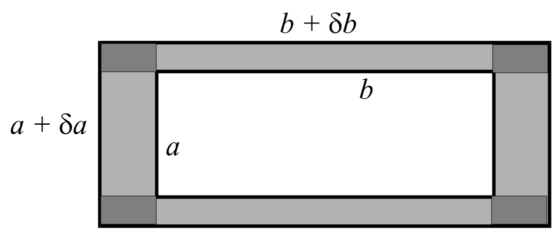

fig. 7.2

Le rectangle intérieur de la figure 7.2 a pour aire $F_0 = a\,b$. Le rectangle extérieur a pour aire $F_1 = (a + \delta a)\,(b + \delta b)$. La valeur exacte de l'accroissement est
$\delta F = F_1 - F_0 = (a\,\delta b + b\,\delta a) + \delta a\,\delta b$. C'est l'aire de la bande grise (gris clair et gris foncé) entre les deux rectangles. δF est la somme de deux termes. Le terme $(a\,\delta b + b\,\delta a)$ ne contient que des termes du premier degré relativement aux accroissements δa et δb : c'est le terme du **premier ordre.** Le terme $\delta a\,\delta b$ est du second degré par rapport à δa et δb : c'est le terme du **second ordre**.

La différentielle de F en $(x = a, x = b)$ est $dF = a\,dy+b\,dx$, sa valeur pour $dx = \delta a$ et $dy = \delta b$ est $dF = a\,\delta b+b\,\delta a$. C'est l'aire des quatre rectangles gris clair. La différentielle de F fournit le terme du premier ordre de δF. En posant $\delta F \simeq dF$ on commet une erreur absolue du second ordre, $e = \delta a\,\delta b$. C'est l'aire des quatre rectangles gris foncé. Lorsque les variations sont petites ($\delta a << a$ et $\delta b << b$) cette erreur est négligeable comparée au terme du premier ordre que constitue la différentielle.

7.3 Expressions remarquables

Soient u et v deux fonctions d'une ou plusieurs variables et a une constante. En utilisant les définitions et les propriétés précédentes on obtient

$u = cte \Longleftrightarrow du = 0$	$d(u + av) = du + adv$
$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
$d\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\,du$	$d\ln\lvert u\rvert = \dfrac{du}{u}$

Exemple. Le calcul de $d\left(\dfrac{1}{h}\right)$ peut se faire de diverses façons.
La relation $d\left(u^n\right) = n\,u^{n-1}\,du$ avec $n = -1$ et $u = h$ donne

$$d\left(\frac{1}{h}\right) = d\left(h^{-1}\right) = -\,h^{-2}\,dh = \frac{-1}{h^2}dh.$$

La relation $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ avec $v = h$ et $u = 1$ (et donc $du = 0$) donne

$$d\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{-dh}{h^2}.$$

Considérons la quantité $F = u^n \cdot v^m \cdot ..$ Il vient $\ln\lvert F\rvert = n\ln\lvert u\rvert + m\ln\lvert v\rvert + ..$
Nous calculons les différentielles de chaque membre (ce que l'on appelle **la différentielle logarithmique de** F).

En utilisant les relations $d\ln\lvert F\rvert = \dfrac{dF}{F}$ ainsi que $d\ln\lvert u\rvert = \dfrac{du}{u}$ et $d\ln\lvert v\rvert = \dfrac{dv}{v}$, nous obtenons

$$\boxed{F = u^n \cdot v^m \cdot .... \Longrightarrow \frac{dF}{F} = n\frac{du}{u} + m\frac{dv}{v} + ...} \tag{7.1}$$

Exemple. $F = y \cdot \sqrt{x}/\left(x+1\right)$. On écrit $F = y \cdot x^{1/2} \cdot \left(x+1\right)^{-1}$.
La relation 7.1 s'écrit $dF/F = dy/y + \frac{1}{2}dx/x - d\left(x+1\right)/\left(x+1\right)$.
Avec $d(x+1) = dx$, on obtient $\dfrac{dF}{F} = \dfrac{dy}{y} + \dfrac{1-x}{2x\left(1+x\right)}\,dx$.

7.4 Calcul d'incertitudes

7.4.1 Rappels

Le résultat d'une mesure est en général donné sous la forme

$$F = f \pm \Delta f$$

Par exemple pour un longueur : $F = 5,231\,\mathrm{m} \pm 2\,10^{-3}\,\mathrm{m}$. **L'*incertitude absolue*** sur la mesure est Δf ; c'est une grandeur positive tandis que f est l'estimation de la grandeur mesurée. Une telle expression a même signification que les inégalités

$$f - \Delta f < F < f + \Delta f$$

On définit aussi **l'*incertitude relative*** $\Delta f\ /\ \lvert F\rvert$. La vraie valeur de F n'est pas connue, on estime donc l'incertitude relative au moyen de la grandeur $\Delta f\ /\ \lvert f\rvert$.

L'incertitude absolue s'exprime avec les mêmes unités que f; par contre l'incertitude relative est un nombre pur, sans unités.

Il ne faut pas confondre incertitude et erreur. L'***erreur,*** e, est défini par la relation $e := f - F$; elle est inconnue. Si e était connue, $F = f - e$ serait connu sans incertitude car f est connu.

Pour déterminer les incertitudes, on peut estimer un majorant des erreurs. On peut aussi répéter plusieurs fois la même mesure et apprécier les petites variations des résultats obtenus. Cette méthode conduit à la notion d'incertitude standard.

7.4.2 Calcul d'incertitudes

Considérons une grandeur physique, F, fonction de deux variables, x et y, que l'on mesure. Le résultat des mesures fournit les estimations $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ des vraies grandeurs x et y. Nous posons $x = \widetilde{x} + \delta x$ et $y = \widetilde{y} + \delta y$. Nous ne connaissons ni δx ni δy. Nous savons seulement que ces quantités satisfont les relations $|\delta x| < \Delta x$ et $|\delta y| < \Delta y$. Les incertitudes Δx et Δy sont connues ou tout au moins estimées convenablement.

De tels résultats s'expriment sous la forme $x = \widetilde{x} \pm \Delta x$ et $y = \widetilde{y} \pm \Delta y$.

Nous cherchons à estimer F et son incertitude. La quantité $\widetilde{F} := F(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ est une estimation de F. Au premier ordre $\delta F := F - \widetilde{F} \simeq dF$.

Il vient donc $F \simeq \widetilde{F} + dF = \widetilde{F} + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} \delta x + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} \delta y.$

La seule indication que nous ayons est $|\delta x| < \Delta x$; c'est à dire $-\Delta x < \delta x < \Delta x$, ce qui implique $-\left|\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \Delta x < \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} \delta x < \left|\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \Delta x.$

De même $-\left|\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \Delta y < \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} \delta y < \left|\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \Delta y.$

En additionnant membres à membres les inégalités précédentes nous obtenons $-\Delta F < dF < \Delta F$ avec

$$\boxed{\Delta F := \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \cdot \Delta x + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}\right| \cdot \Delta y}$$

Par conséquent il vient $F = \widetilde{F} + \delta F$ avec $|\delta F| \simeq |dF| < \Delta F$. On écrit ce résultat sous la forme

$$\boxed{F = \widetilde{F} \ \pm \ \Delta F}$$

La quantité ΔF est une estimation de l'incertitude sur F.

<u>Exemple</u>. $F = y \cdot \sqrt{x}/(x+1)$ avec $y = 1 \pm 0,1$ et $x = 4 \pm 0,2$ soit $\widetilde{F} = \dfrac{2}{5}$; $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = \dfrac{1-x}{2(1+x)^2\sqrt{x}}\, y$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} = -\dfrac{3}{100}$; $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \sqrt{x}/(x+1)$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\widetilde{x},\widetilde{y})} = \dfrac{2}{5}$.

On en déduit $\Delta F = \dfrac{3}{100} \cdot 0,2 + \dfrac{2}{5} \cdot 0,1 = 0,046 \simeq 0,05$.

$$F \simeq \frac{2}{5} \pm 0,05 = 0,4 \pm 0,05$$

On peut aussi opérer de la façon suivante :

$$\delta F/F \simeq \delta y/y + \tfrac{1}{2}\delta x/x - \delta(x+1)/(x+1).$$

Au voisinage de $x = \widetilde{x} = 4$ et $y = \widetilde{y} = 1$ il vient

$$\delta F/F \simeq \delta y + \frac{1}{8}\delta x - \frac{1}{5}\delta x = \delta y - \frac{3}{40}\delta x.$$

Avec $F \simeq \widetilde{F} = \dfrac{2}{5}$ on obtient la petite variation de F due aux variations de x et y : $\delta F = \widetilde{F} \cdot \left(\delta y - \dfrac{3}{40}\delta x\right) = \dfrac{2}{5}\delta y - \dfrac{3}{100}\delta x$.

Les relations $|\delta x| < 0,2$ et $|\delta y| < 0,1$ permettent d'obtenir le minimum de δF (pour $\delta y = -0,1$ et $\delta x = 0,2$) et le maximum de δF (pour $\delta y = 0,1$ et $\delta x = -0,2$). On obtient alors $-0,046 < \delta F < 0,046$ ce qui est le résultat précédent.

On remarquera que les incertitudes sur $\sqrt{x}$ et sur $1/(x+1)$ ne s'additionnent pas. Ce sont les petites variations possibles qui s'additionnent.

7.5 Différentielles et dérivées de vecteurs

L'un des domaines d'application des vecteurs en physique est l'étude des mouvements.

Afin d'étudier le mouvement d'un mobile, il faut décider ce qu'est un **référentiel fixe** : nous devons choisir une origine, O, et un trièdre orthonormé $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ que nous déclarons être fixes. Les mouvements étudiés seront alors les **mouvements par rapport à ce référentiel**.

Comment choisir concrètement le référentiel fixe ? Les critères sont soit de nature mathématique, dans ce cas c'est une question de définition et de vocabulaire, soit de nature physique et alors la recherche d'un référentiel fixe s'identifie à la recherche d'un référentiel privilégié dans lequel les lois de la physique seront "aussi simple que possible".

Longtemps on a considéré que le référentiel lié à la Terre était le "bon" référentiel. C'était acceptable pour décrire la physique terrestre mais pas pour comprendre les mouvements des planètes. Le repère héliocentrique s'imposa. De toutes façons, avec l'amélioration des performances expérimentales, il aurait fallu abandonner le repère terrestre, en l'absence même de toutes considérations astronomiques.

7.5.1 Définitions.

Le référentiel fixe étant choisi, considérons un mobile ponctuel, M. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ varie avec le temps (ses composantes (X, Y, Z) sont des fonctions du temps).

On peut, sans considération de temps, imaginer également des vecteurs dont les coordonnées sont fonction d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, le vecteur $\overrightarrow{u}_\varphi$ introduit ci-dessus (fig. 4.3) est fonction de la variable φ, tandis que les vecteurs $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$ dépendent des deux variables θ et φ.

Considérons le vecteur $\overrightarrow{V} = X\,\overrightarrow{u}_x + Y\,\overrightarrow{u}_y + Z\,\overrightarrow{u}_z$ dont les composantes sont des fonctions de la variable t. <u>La différentielle</u> de $\overrightarrow{V}$ est le vecteur $d\overrightarrow{V}$

$$\boxed{d\overrightarrow{V} := dX\,\overrightarrow{u}_x + dY\,\overrightarrow{u}_y + dZ\,\overrightarrow{u}_z}$$

$d\overrightarrow{V}$ représente la variation du vecteur $\overrightarrow{V}$ lorsque ses composantes varient respectivement de dX, dY, dZ.

<u>La dérivée</u> de $\overrightarrow{V}$ par rapport à t est, par définition,

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} := \frac{dX}{dt}\,\overrightarrow{u}_x + \frac{dY}{dt}\,\overrightarrow{u}_y + \frac{dZ}{dt}\,\overrightarrow{u}_z}$$

7.5.2 Propriétés.

Les propriétés des différentielles et des dérivées sont résumées ci-dessous.

$$\boxed{\begin{array}{c} d\left(\overrightarrow{V} + f\,\overrightarrow{W}\right) = d\overrightarrow{V} + df\,\overrightarrow{W} + f\,d\overrightarrow{W} \Longrightarrow \\ \hline \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V} + f\,\overrightarrow{W}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{V}}{dt} + \dfrac{df}{dt}\,\overrightarrow{W} + f\,\dfrac{d\overrightarrow{W}}{dt} \end{array}} \tag{7.2}$$

où $f = f(t)$ est une fonction de la variable t.

$$\boxed{\begin{array}{c} d\left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}\right) = d\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{W} \Longrightarrow \\ \hline \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{W}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{V}}{dt} \cdot \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{W}}{dt} \end{array}} \tag{7.3}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} d\left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) = d\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \wedge d\overrightarrow{W} \Longrightarrow \\ \hline \dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) = \dfrac{d\overrightarrow{V}}{dt} \wedge \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{W}}{dt} \end{array}}$$

Exemple. Le vecteur $\overrightarrow{u}_\rho = \cos\varphi\,\overrightarrow{u}_x + \sin\varphi\,\overrightarrow{u}_y$ (cf. fig. 4.3) est un vecteur de norme constante dont la dérivée par rapport à φ est le vecteur

$$\frac{d\overrightarrow{u}_\rho}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{u}_x + \cos\varphi\,\overrightarrow{u}_y = \overrightarrow{u}_\varphi.$$

On peut vérifier que $\overrightarrow{u}_\varphi$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}_\rho$. C'est généralement le cas lorsqu'on dérive un vecteur de norme constante.

En effet, soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(t)$ tel que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = C$ et $\overrightarrow{n} := \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt}$. La relation $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = C$ implique $\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}\right) = 0$. En utilisant la relation 7.3 il vient
$0 = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{u} = 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont donc orthogonaux..

7.6 Champs de vecteurs

Certaines grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs, c'est le cas de la vitesse d'un mobile ponctuelle, de son accélération ou de la force qui agit sur un solide. Parfois, la connaissance du vecteur associé à une grandeur physique ne suffit pas à sa description.

Dans le cas d'une force, si nous connaissons le vecteur associé $\overrightarrow{F}$, c'est à dire sa direction, son sens et son intensité, nous ne pouvons pas prédire complètement son effet tant que nous ne connaissons pas son point d'application, A. On définit **la ligne d'action de la force** comme la droite, D, parallèle à $\overrightarrow{F}$ qui passe par A. L'expérience montre que la force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un autre point B de sa ligne d'action produit le même effet. Une force est donc définie par l'ensemble $\left\{\overrightarrow{F}, D\right\}$ on dit que c'est **un vecteur glissant** car on peut faire glisser la force le long de sa ligne d'action sans en modifier l'effet.

Considérons maintenant le cas d'une répartition donnée de charges électriques. Nous disposons d'une charge ponctuelle q que nous déplaçons à volonté. En chaque point, la charge q est soumise à une force $\overrightarrow{F}$, résultante des attractions et des répulsions de la répartition de charges donnée. La force $\overrightarrow{F}$ dépend du point M où nous plaçons la charge q; c'est une fonction des coordonnées, x, y, z de M. On dit que l'on est en présence d'**un champ de force.** Le vecteur qui représente la force n'a pas de signification physique indépendamment du point M où se situe la charge q sur laquelle s'exerce cette force. C'est donc l'ensemble $\left\{\overrightarrow{F}, M\right\}$ qui a un sens physique. La force est représenté ici par **un vecteur lié**. Un champ de force est donc décrit par un ensemble de vecteurs liés.

7.6.1 Circulation d'un vecteur.

Considérons une courbe $\mathcal{C}$ le long de laquelle est défini un vecteur $\overrightarrow{F}$ en chaque point. Soit s l'abscisse curviligne d'un point courant, M et $\overrightarrow{u}$ le vecteur tangent unitaire à la courbe en ce point. Le vecteur $\overrightarrow{F}$ dépend du point M considéré : $\overrightarrow{F}$ est donc une fonction de s. Il en est de même de $\overrightarrow{u}$.

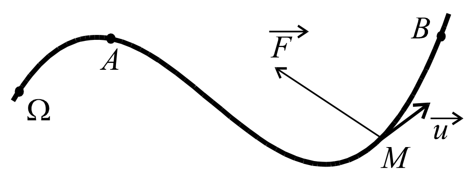

fig. 7.3

On pose $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}\, ds$. **La circulation**, $W_{AB/\mathcal{C}}$, du vecteur $\overrightarrow{F}$ le long de la courbe C de A à B est l'intégrale de dW

$$\boxed{W_{AB/\mathcal{C}} = \int_{s_A}^{s_B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}\, ds}$$

Lorsque $\overrightarrow{F}$ est une force dont le point d'application est M, la circulation est appelée **"*travail*"** de la force $\overrightarrow{F}$.

Exemple. Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y, z) = ay\,\overrightarrow{u}_x$ où a est une constante positive. Nous considérons les deux courbes, (1) et (2), de la figure 7.4 qui relient l'origine O au point Q de coordonnées (ℓ, ℓ)

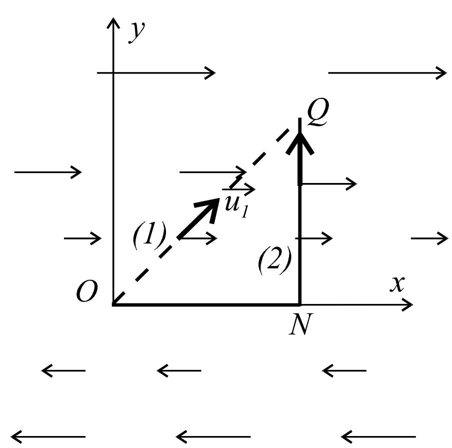

fig. 7.4

Sur la figure 7.4 nous avons représenté quelques uns des vecteurs du champ considéré. L'origine de chaque vecteur représenté est le point de coordonnées (x, y, z) où $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y, z)$ a été calculé.

Le long de ON les vecteurs sont nuls (car $y = 0$). Le long de NQ le vecteur $\overrightarrow{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ en tout point. Par conséquent, $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}\, ds = 0$ en tout point de la courbe ONQ et $W_{ONQ} = 0$.

Le long de OQ, le vecteur tangent unitaire est $\overrightarrow{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}_y)$ en chaque point.

Nous choisissons l'origine des abscisses curvilignes en O. Il vient $y = s\frac{\sqrt{2}}{2}$ en chaque point d'ordonnée y de la courbe OQ. On en déduit $ds = \sqrt{2}dy$.

En ce même point $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}_1 = ay\frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}_1 ds = ay\, dy$. Ce qui implique $W_{OQ} = \int_{y_O}^{y_Q} ay\, dy$ avec $y_O = 0$ et $y_Q = \ell$. En intégrant on trouve $W_{OQ} = \left[\frac{1}{2}ay^2\right]_0^\ell = \frac{1}{2}a\ell^2 \neq W_{ONQ}$

On en déduit que **la circulation d'un champ de vecteurs entre deux points dépend le plus souvent du chemin emprunté**.

Remarquons que pour calculer la circulation d'un vecteur le long de OQ, il n'est pas nécessaire que ce vecteur appartienne à un champ de vecteurs mais seulement qu'il soit défini en tout point de OQ.

Nous allons maintenant étudier un cas important où la circulation d'un champ de vecteurs ne dépend que des points A et B et non du chemin entre A et B.

7.6.2 Gradient d'une fonction.

Considérons une fonction des coordonnées $V(x, y, z)$. Nous définissons le champ de vecteurs ***"gradient*** **de** V**"** :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad }[V]} := \frac{\partial V}{\partial x}\ \overrightarrow{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\ \overrightarrow{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\ \overrightarrow{u}_z}$$

Exemple. $V(x, y, z) = 1/r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (c'est la coordonnée radiale de la représentation sphérique introduite en 4.1 B-). Le calcul donne $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad }[r]} &= \frac{x}{r}\overrightarrow{u}_x + \frac{y}{r}\overrightarrow{u}_y + \frac{z}{r}\overrightarrow{u}_z := \overrightarrow{u}_r \\
\overrightarrow{\text{grad}\left[\frac{1}{r}\right]} &= -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{u}_z\right) = -\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u}_r
\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{u}_r$ est le vecteur radial de la représentation sphérique.

Cherchons la différentielle de V. On vérifie directement la relation

$$\boxed{dV := \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{\text{grad }[V]} \cdot d\overrightarrow{OM}} \tag{7.4}$$

où $d\overrightarrow{OM} = dx\,\overrightarrow{u}_x + dy\,\overrightarrow{u}_y + dz\,\overrightarrow{u}_z$.

La circulation, W, du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}\ [V]}$ le long d'une courbe, entre les points A et B, s'exprime sous la forme $W := \int_{s_A}^{s_B} \overrightarrow{\text{grad}\ [V]} \cdot \overrightarrow{u}\ ds$

La fonction V et son gradient dépendent de la position, sur la courbe, du point M où ils sont calculés : ce sont des fonctions de l'abscisse curviligne s du point M. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe : $\overrightarrow{u} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$. C'est également une fonction de s.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\ ds$ est la différentielle de $\overrightarrow{OM}$. En effet $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(s) \Rightarrow$
$d\overrightarrow{OM} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} ds := \overrightarrow{u}\ ds.$

En utilisant la relation 7.4 il vient $\overrightarrow{\text{grad}\ [V]} \cdot \overrightarrow{u}\ ds = \overrightarrow{\text{grad}\ [V]} \cdot d\overrightarrow{OM} = dV$. La relation 5.1 implique $W = \int_{s_A}^{s_B} dV = V(s_B) - V(s_A)$.

$V(s)$ est la valeur de V au point d'abscisse curviligne s par conséquent $V(s_B) - V(s_A) = V(B) - V(A)$ ne dépend que de A et B et non du chemin intermédiaire :

$$\boxed{\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}\ [V]} \cdot \overrightarrow{u}\ ds = V(B) - V(A)}$$

Exemple. Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{F} = ay\,\overrightarrow{u}_x + ax\,\overrightarrow{u}_y := F_x\,\overrightarrow{u}_x + F_y\,\overrightarrow{u}_y$.

Si $\overrightarrow{F}$ est le gradient d'une fonction V, le lemme de Schwartz implique :
$F_x = \partial V/\partial x$ et $F_y = \partial V/\partial y \Longrightarrow \partial F_x/\partial y = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \partial F_y/\partial x$. Cette condition est nécessaire ; il s'avère qu'elle est également suffisante.

Ici $\partial F_x/\partial y = a = \partial F_y/\partial x \Longrightarrow$ le champ de vecteur est le gradient d'une fonction, $V(x, y, z)$. On dit que $\overrightarrow{F}$ **dérive du potentiel** V.

Pour calculer, par exemple, la circulation entre les points $O(0, 0)$ et $Q(\ell, \ell)$ on peut choisir un chemin particulier et calculer la circulation W le long de ce chemin car le résultat ne dépend pas du chemin choisi.

On peut aussi chercher le potentiel V.

Dans ce but on considère que y est une constante (arbitraire mais donnée). Le potentiel V est donc une fonction de x : $V(x, y)_{y=cte} = \Phi(x)$. Par conséquent
$\dfrac{d\Phi}{dx} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = ay$. En intégrant il vient $V = \Phi = ayx + C$ (car, ici, y est une constante). La constante d'intégration C est constante dans les conditions considérées, c'est à dire dans des conditions telles que seul x varie. C est donc éventuellement une fonction de y (mais non de x). On en déduit $V(x, y) = ayx + C(y)$. On considère maintenant que y seul varie et que x est maintenu constant. La relation $\dfrac{\partial V}{\partial y} = ax$ s'écrit $ax + \dfrac{dC}{dy} = ax$ soit $\dfrac{dC}{dy} = 0$.
La quantité C, susceptible d'être une fonction de y seulement, est en fait une constante car sa dérivée (par rapport à y est nulle). On trouve donc $V = axy + cte$.

La circulation de $\overrightarrow{F}$ entre O et Q vaut $V(Q) - V(O) = a\,x_Q\,y_Q - a\,x_O\,y_O = a\ell^2$.

Remarque importante. Si une fonction V est constant, cela signifie que V n'est pas une fonction de x, c'est à dire $\partial V/\partial x = 0$ et de même $\partial V/\partial y = 0 = \partial V/\partial z$ d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}\ [V]} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow V = cte}$$

N.B. On trouve souvent l'écriture $\overrightarrow{\nabla} f$ pour $\overrightarrow{\text{grad}\,[f]}$ que nous avons utilisé ici.