

Enseignement à distance

Introduction à la physique

Unité d'enseignement LP 104

Fascicule 2/2 : Le cours

Introduction : l'univers de la physique

Éléments de mécanique

Théorie cinétique et introduction à la thermodynamique

Hydrostatique, hydrodynamique des fluides parfaits

Philippe Tournenc

Table des matières

Avertissement	iii
I Introduction : l'univers de la physique	1
1 L'univers microscopique	3
1.1 Les constituants élémentaires	3
1.2 Les interactions	5
1.3 Solides, liquides et gaz	7
1.3.1 <i>Généralités.</i>	7
1.3.2 <i>Ordre et désordre.</i>	8
1.3.3 <i>Distances intermoléculaires.</i>	9
1.4 L'agitation thermique	9
2 Analyse dimensionnelle	15
2.1 Dimensions physiques et unités	15
2.2 Remarques	17
2.3 Applications	18
2.3.1 <i>Changement d'unités.</i>	18
2.3.2 <i>Homogénéité des formules.</i>	18
2.3.3 <i>Lois physiques.</i>	19
II Éléments de mécanique	21
3 Éléments de dynamique	23
3.1 Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel	23
3.1.1 <i>Définitions.</i>	23
3.1.2 <i>Composition des vitesses.</i>	24
3.1.3 <i>Le principe fondamental de la dynamique.</i>	24
3.2 Les systèmes de points matériels	25
3.2.1 <i>Le centre d'inertie d'un système de points matériels.</i>	25
3.2.2 <i>Forces intérieures et extérieures au système.</i>	25
3.2.3 <i>Mouvement du centre d'inertie.</i>	26
3.2.4 <i>Quantité de mouvement.</i>	27
3.3 Équilibre d'un solide	28
3.3.1 <i>Absence de déplacement.</i>	28
3.3.2 <i>Moment de forces.</i>	28
3.3.3 <i>Absence de rotation.</i>	29
3.4 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	31

4	Travail et énergie	35
4.1	Travail, théorème de l'énergie cinétique	35
4.1.1	<i>Travail, puissance.</i>	35
4.1.2	<i>Energie cinétique d'un point matériel.</i>	36
4.1.3	<i>Energie cinétique d'un système de points matériels.</i>	37
4.1.4	<i>Théorème de l'énergie cinétique.</i>	37
4.2	Energie potentielle	38
4.2.1	<i>Définition et exemples.</i>	38
4.2.2	<i>L'énergie potentielle de pesanteur.</i>	41
4.2.3	<i>Divers exemples.</i>	42
4.3	Théorème de l'énergie mécanique	43
4.3.1	<i>Le théorème de l'énergie mécanique.</i>	43
4.3.2	<i>La conservation de l'énergie.</i>	43
4.3.3	<i>Evolution spontanée et équilibres des systèmes mécaniques.</i>	44
4.4	Les vibrations d'une molécule diatomique (test d'assimilation)	46
4.4.1	<i>Un modèle d'oscillateur harmonique.</i>	46
4.4.2	<i>Le ressort moléculaire.</i>	47
5	Les collisions	51
5.1	Généralités	51
5.2	Collision élastique	52
5.3	Choc "super-élastique"	54
5.4	Collisions inélastiques	55
5.5	Origine de la pression d'un gaz	56
III	Théorie cinétique et introduction à la thermodynamique	59
	Introduction	61
6	Outils de description statistique	63
6.1	Répartition des molécules dans l'espace	63
6.2	Distribution des vitesses et des énergies	64
6.2.1	<i>Distribution des vitesses.</i>	64
6.2.2	<i>Distribution des énergies.</i>	65
6.3	Moyenne et écart quadratique moyen d'une variable aléatoire	65
6.3.1	<i>La moyenne.</i>	66
6.3.2	<i>L'écart quadratique moyen.</i>	67
6.3.3	<i>Propriétés de la moyenne et de l'écart quadratique moyen.</i>	67
6.3.4	<i>Variables indépendantes.</i>	68
7	Théorie cinétique du gaz parfait monoatomique	71
7.1	Les hypothèses	71
7.1.1	<i>Répartition des molécules dans l'espace.</i>	71
7.1.2	<i>La répartition des molécules dans l'espace des vitesses.</i>	72
7.1.3	<i>Conclusion.</i>	75
7.2	Température cinétique	76
7.3	Pression cinétique	77
7.4	Les propriétés des gaz parfaits	78
7.5	Ordres de grandeurs et applications	80

Avertissement	iii
8 Les gaz parfaits polyatomiques, les mélanges de gaz parfaits	83
8.1 Equipartition de l'énergie	84
8.1.1 <i>Chaleur spécifique à volume constant.</i>	85
8.1.2 <i>Température d'équilibre.</i>	87
8.1.3 <i>Chaleur spécifique à pression constante.</i>	87
8.2 Mélanges de gaz parfaits	88
9 Chaleur et travail	91
9.1 Introduction	91
9.2 La chaleur	92
9.2.1 <i>La conduction.</i>	92
9.2.2 <i>La convection.</i>	93
9.2.3 <i>Le rayonnement.</i>	94
9.2.4 <i>L'équilibre thermique.</i>	95
9.3 Le travail	96
9.3.1 <i>Le travail reçu par un système.</i>	96
9.3.2 <i>La représentation de Clapeyron.</i>	97
10 Le premier principe	99
10.1 Energie interne et enthalpie	99
10.1.1 <i>Energie interne.</i>	99
10.1.2 <i>Enthalpie.</i>	100
10.2 Applications	101
10.2.1 <i>La Thermochimie : un exemple.</i>	101
10.2.2 <i>Les changements d'état : un exemple.</i>	102
10.2.3 <i>Détentes de Joule Gay-Lussac et de Joule Thomson.</i>	102
IV Hydrostatique, hydrodynamique des fluides parfaits	105
11 Le théorème de Bernoulli	107
11.1 Généralités sur l'écoulement des fluides	107
11.2 Le théorème de Bernoulli	109
11.3 Généralisation du théorème de Bernoulli	110
12 Applications du théorème de Bernoulli	113
12.1 Application à l'hydrostatique	113
12.2 Application aux écoulements permanents	115

oooooooooooooooooooooooooooooooo

Avertissement

Certaines démonstrations et certains compléments "*hors programme*" figurent dans le présent fascicule. Lorsque c'est le cas nous le signalons. Précisons qu'il y a trois sortes de sujets "*hors programme*" :

- 1- ceux qui sont supposés assimilés et bien connus (les quatre opérations par exemple),

2- ceux qui relèvent d'une nécessaire anticipation sur le programme d'une autre unité d'enseignement (l'utilisation des différentielles pour le calcul des petites variations).

3- ceux qui sont mentionnés pour être complet mais qui relèvent de la maîtrise d'une technique qui sera éventuellement développée plus tard et ailleurs (certaines démonstrations).

Les développements "hors programme" apparaissent comme nécessaires à la compréhension du programme lui-même, il en va de même des nombreux exemples et exercices proposés. A l'évidence un sujet "hors programme" peut discrètement s'inviter à l'examen (sauf ceux de la troisième catégorie).

Première partie

Introduction : l'univers de la physique

Chapitre 1

L'UNIVERS MICROSCOPIQUE

Les milieux matériels, l'air environnant, un bloc de glace ou de l'eau liquide, apparaissent comme des milieux continus. Nous savons qu'à l'échelle *microscopique* (de l'ordre de quelques angströms ou moins) il n'en est rien car la matière est constituée de molécules imperceptibles à l'échelle *macroscopique* (\sim millimètre ou plus). De la même manière, à hauteur d'homme, une plage apparaît comme une nappe continue de sable, alors qu'elle est formée en réalité de grains qui deviennent perceptibles de plus près.

L'Univers, à l'échelle astronomique ($\sim 10^8 - 10^{10}$ km), est constitué d'un vide dans lequel errent quelques rares objets, étoiles ou planètes. A l'échelle cosmologique ($\sim 10^{20}$ km), l'Univers peut être considéré comme un milieu continu de faible densité.

Il est impossible de décrire le comportement d'un système à l'échelle macroscopique en décrivant le comportement de chacune des molécules qui le composent. Il y en a trop!

Dans 1 cm^3 d'eau il y a $3 \cdot 10^{22}$ molécules d'eau (H_2O). C'est un nombre gigantesque à l'échelle humaine. C'est le nombre de battements d'un coeur humain pendant huit mille milliards ($8000 \times 10^9 = 8 \cdot 10^{12}$) de vies dont chacune durerait 100 ans.

Pour étudier les systèmes physiques à l'échelle macroscopique il est donc nécessaire d'utiliser des concepts et des lois spécifiques. La relation entre l'univers macroscopique et l'univers microscopique peut cependant être établie par les méthodes statistiques concernant les populations nombreuses. Ainsi, la théorie cinétique des gaz permet d'expliquer la loi des gaz parfaits.

Pour faciliter la description des objets macroscopiques on introduit "**le nombre d'Avogadro**" : $N_{\text{Av}} \simeq 6,02 \cdot 10^{23}$ (la définition précise est donnée ci-dessous page 5). Une collection d'objets en nombre égal au nombre d'Avogadro est appelé "une mole d'objets". Ainsi une mole d'atomes est constituée de $6,02 \cdot 10^{23}$ atomes, de même une mole d'ions. Cependant on ne dit pas "une mole de molécules" mais tout simplement "une mole" (dans les unités, mole admet " mol " pour abréviation) . Une mole d'eau est constitué de N_{Av} molécules ; c'est un système macroscopique dont la masse est 18 g.

1.1 Les constituants élémentaires

La matière est formée de molécules. Celles-ci sont constituées d'un atome unique (gaz rares tel l'hélium ou l'argon) ou de plusieurs atomes (H_2 , CO_2 ...). Ils peuvent être en petit nombre (quelques unités) ou en grand nombre dans les polymères ou les molécules biologiques (plusieurs centaines de milliers ou même beaucoup plus). Un monocristal de dimensions macroscopiques peut aussi être considéré comme une molécule unique formée d'un nombre d'atomes qui peut atteindre 10^{15} ou plus.

Les atomes sont constitués d'un noyau (formé de nucléons) dont les dimensions sont de l'ordre de quelques femtomètres ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$; cette grandeur est parfois appelée "un fermi"). Le noyau est entouré d'un nuage d'électrons. Les dimensions de l'atome sont donc celles de son nuage électronique. Ces dimensions varient d'un atome à l'autre

mais restent de l'ordre de quelques angströms ($1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$).

Pour assurer une liaison chimique entre les atomes, les électrons des divers nuages se mettent en commun ou s'échangent ; les nuages électroniques se recouvrent. La conséquence en est que la distance inter-atomique est de l'ordre de l'angström.

L'échelle "*mésoscopique*" correspond à des dimensions intermédiaires entre l'échelle microscopique ("atomique" serait plus correcte) et l'échelle macroscopique. Elle concerne, par exemple, les agrégats d'atomes.

Les constituants élémentaires sont le nucléon et l'électron. En réalité les nucléons sont eux mêmes composés de quarks, quant à l'électron ce n'est que l'un des représentants de la famille des "*leptons*". Cependant, la matière ordinaire étant constituée de nucléons et d'électrons nous limitons nos considérations à ces deux types de particules.

L'électron : La masse de l'électron est $m_e \simeq 0,9 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$.

Il possède une charge électrique négative : $q_e = -e \simeq -1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.

Un atome d'une espèce donnée contient un nombre bien défini d'électrons, appelé "*numéro atomique*" et noté Z . Le nuage électronique (et donc Z) définit les propriétés chimiques de l'atome.

On compte un peu plus d'une centaine d'atomes d'espèces différentes. Certains d'entre-eux, associés à de grandes valeurs de Z , ont été obtenus artificiellement et n'existent pas à l'état naturel.

Les nucléons : Les nucléons sont de deux sortes : le *proton* et le *neutron*. Le proton possède une charge $e \simeq +1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ tandis que le neutron est neutre. La masse d'un nucléon, m_n , varie peu selon qu'il est proton ou neutron : $m_n \simeq 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}^\dagger$.

Le noyau : Le noyau atomique est formé de nucléons. Le nombre de nucléons est le "*nombre de masse*", il est noté A .

L'atome étant neutre, les protons y sont en nombre Z , égal au numéro atomique de l'atome. Par contre le nombre de neutrons est variable selon l'*isotope* considéré d'une espèce donnée.

La notation employée pour désigner un noyau est A_ZX où X désigne l'espèce (redondance avec Z). Lorsqu'on considère seulement un noyau, Z est appelé "*nombre de charge*" ("*numéro atomique*" est une expression réservée aux *atomes*).

Ainsi le noyau de deutérium (hydrogène lourd) est 2_1H ; il contient 1 proton ($Z = 1$) et 1 neutron ($A - Z = 1$).

${}^{206}_{82}Pb$ et ${}^{204}_{82}Pb$ désignent deux isotopes du plomb ($Z = 82$ protons), le premier possède 124 neutrons ($124 + 82 = 206$) tandis que le second en possède 122.

Les propriétés de radioactivité sont liées au noyau. Ainsi ${}^{206}_{82}Pb$ et ${}^{12}_6C$ sont stables tandis que ${}^{204}_{82}Pb$ et ${}^{14}_6C$ se désintègrent après un certain temps.

Remarques : $m_n \gg m_e$ et $A \geq Z$. On en déduit que **la masse d'un atome est pratiquement égale à celle de son noyau**. Par conséquent un calcul approximatif donne $m \simeq Am_n$.

L'*unité de masse atomique* (*u.m.a*) est défini comme 1/12 de la masse de l'atome de carbone dont le noyau est ${}^{12}_6C$. Elle vaut $1,66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$. Par définition la masse d'un atome de carbone ${}^{12}_6C$, est donc 12 u.m.a. La formule précédente donne une valeur, Am_n , légèrement supérieure (la différence relative est $\frac{(1,67 - 1,66)}{1,66} \simeq 6 \cdot 10^{-3}$).

[†]masse du proton : $1,673 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$, masse du neutron : $1,675 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$.

Un calcul plus précis qui tient compte de la masse des électrons, de celle des proton et des neutron donne encore le même résultat : la somme des masses des constituants est supérieure à la masse de l'atome. La différence est le "défaut de masse" Δm , qui représente l'énergie de liaison, E , des constituants : $E = \Delta m c^2$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et E l'énergie qu'il faut dépenser pour disperser les électrons et séparer le noyau en ses divers constituants. C'est pratiquement l'énergie de liaison du noyau seul (énergie de liaison des nucléons entre eux) car l'énergie de liaison des électrons au noyau est beaucoup plus petite.

Rappelons enfin la définition du **nombre d'Avogadro** déjà mentionné :

$$N_{Av} \times 1 \text{ u.m.a.} := 1 \text{ g.}$$

1.2 Les interactions

A l'échelle sub-atomique (qui ne nous concerne pas ici), les interactions fortes assurent la liaison entre quarks tandis que les interactions faibles expliquent les phénomènes de radioactivité.

A l'échelle atomique, ce sont les interactions électromagnétiques qui dominent, plus précisément les interactions coulombiennes.

Entre deux charges ponctuelles Q et Q' , s'exercent des forces F portées par la droite QQ' comme l'indique la figure ci-dessous.

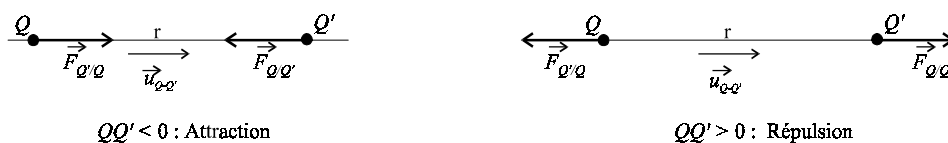


fig. 1.1 :
$$\vec{F}_{Q/Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q'}{r^2} \vec{u}_{Q-Q'}$$

La force qu'exerce Q sur Q' est $\vec{F}_{Q/Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q Q'}{r^2} \vec{u}_{Q-Q'}$ où $\vec{u}_{Q-Q'}$ est le vecteur unitaire de Q vers Q' . Le coefficient ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

$K_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$ est parfois appelé "constante de Coulomb".

Les forces coulombiennes expliquent les liaisons noyau-électrons et les liaisons entre atomes dans les molécules. Dans les liquides, elles expliquent également l'existence d'attractions faibles entre molécules neutres, forces de van der Waals par exemple.

Une molécule est neutre globalement mais la répartition des charges positives et négatives n'est pas uniforme. La figure 1.2 montre l'existence de deux pôles électriques dans la molécule d'eau.

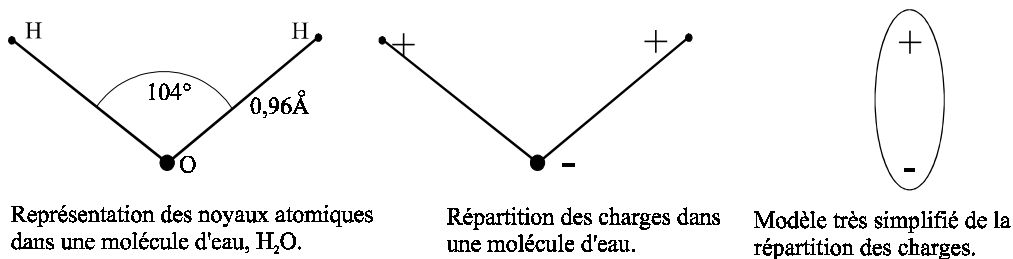
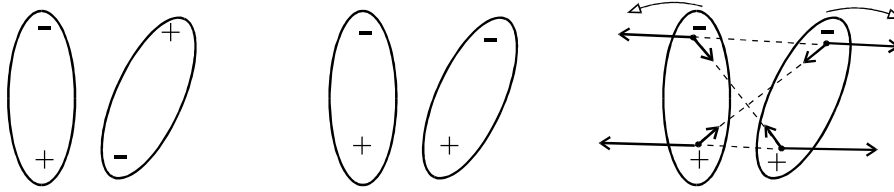


fig. 1.2 : La molécule est neutre mais les charges ne sont pas réparties uniformément.

Le schéma ci-dessous (fig. 1.3) explique l'existence d'une force attractive entre les molécules neutres.



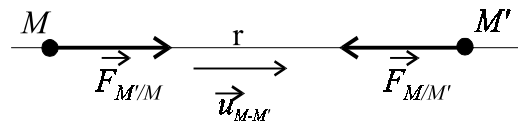
Configuration 1 : fréquente **Configuration 2 : instable** **Configuration 2 : les forces**

fig. 1.3 Dans la configuration 1, les forces sont opposées à celles qui agissent dans la configuration 2 (représentées sur le troisième schéma ci-dessus).

Les deux molécules sont neutres mais ici la répartition des charges est dipolaire. Dans la configuration 2 les charges de même signe sont plus proches que les charges de signes opposées; il en résulte une répulsion plus forte (entre charges de mêmes signes) que l'attraction entre charges de signes contraires. Le bilan en est une répulsion entre les molécules. Celles-ci vont s'éloigner, se retourner et finalement se retrouver dans la configuration 1. Dans la configuration 1 les charges de signes opposés sont plus proches que les charges de même signe; il en résulte une attraction plus forte (entre charges de signes contraires) que la répulsion entre charges de même signe. Le bilan est une (faible) attraction entre les molécules. Une expérience analogue peut aisément être faite avec de petits barreaux aimantés placés dans le couvercle d'une boîte à chaussures que l'on agite afin de diminuer les frottements.

Ces forces décroissent très rapidement lorsque la distance des molécules augmente.

A l'échelle astronomique ou cosmologique la force dominante est l'attraction gravitationnelle.



Attraction gravitationnelle

fig. 1.4 :
$$\vec{F}_{M'/M} = G \cdot \frac{MM'}{r^2} \vec{u}_{M-M'}$$

Les notations sont, *mutatis mutandis*, celles utilisées ci-dessus pour décrire la force coulombienne. Cependant, ici, ce sont les masses M et M' qui s'attirent jouant le rôle de "charges gravitationnelles". Un autre type de masse, m , apparaît dans la loi fondamentale de la dynamique qui relie la force à l'accélération d'un corps (cf. la relation 3.1), or rien ne permet d'affirmer *a priori* que l'on a $M = m$. Cependant cette égalité est très bien vérifiée quels que soient les corps étudiés. Cette propriété remarquable est connue sous le nom de "principe d'équivalence".

Remarquons que contrairement au cas des forces de Coulomb, les forces gravitationnelles sont toujours attractives tandis que les masses M et M' sont toujours des quantités positives.

Dans le domaine atomique les forces gravitationnelles sont négligeables devant les forces coulombiennes : elles ne jouent aucun rôle. Au contraire, les objets astrophysiques

étant électriquement neutres, c'est l'interaction gravitationnelle qui règle le comportement de l'univers à grande échelle.

1.3 Solides, liquides et gaz

1.3.1 Généralités.

A l'échelle macroscopique, la matière se présente sous des aspects très divers. Dans une première approche on distingue

1. les corps solides qui présentent toujours la même forme et conservent donc un même volume quelles que soient les circonstances,
2. les liquides qui prennent la forme des récipients qui les contiennent sans occuper cependant tout l'espace mis à leur disposition car ils conservent toujours le même volume,
3. les gaz qui comme les liquides n'ont pas de forme propre et prennent celle des récipients qui les contiennent mais qui, à la différence des liquides, occupent tout le volume disponible.

La description précédente permet de distinguer *les fluides* qui n'ont pas de forme propre et les solides. Les fluides sont susceptibles de s'écouler ce qui n'est pas le cas des solides.

L'écoulement d'un fluide peut être ralenti par des frottements internes. Une huile à 15 °C est plus visqueuse que la même huile à 60 °C ou que l'eau. La viscosité peut être si élevée que le corps devient "pâteux" (voire même solide!). Certains corps se comportent comme un solide lorsqu'on les frappe et comme un fluide très visqueux lorsqu'on les manie plus doucement. Les solides eux-mêmes ne sont pas indéformables. Une pression locale en modifie la forme, voire le volume. Cependant si les forces appliquées restent peu importantes les modifications sont négligeables.

A l'évidence, solides, liquides et gaz tels que nous les avons introduits, sont des modèles commodes qui décrivent convenablement de nombreux matériaux mais qui ne décrivent rigoureusement aucun d'entre eux.

Le monde familier qui nous entoure est très hétérogène[†] : bois, matières plastiques, verres, métaux, liquides et gaz s'y côtoient. Certaines parties en sont cependant homogènes. Versons de l'huile et de l'eau dans un récipient. L'huile surnage. On distingue trois régions homogènes : l'eau, l'huile et l'air au dessus du récipient. On est en présence de trois *phases*[‡], une phase gazeuse et deux phases liquides.

Les liquides peuvent être miscibles (l'eau et l'alcool par exemple). Un mélange de deux liquides miscibles constitue une phase homogène. Dans le cas contraire, les liquides forment un mélange hétérogène constitué de deux phases homogènes (par abus de langage on dit parfois que "la" phase liquide est hétérogène).

Les mélanges de gaz forment toujours une seule phase (homogène) tandis que les mélanges de solides sont le plus souvent hétérogènes.

Ici encore la description est simplificatrice.

Une petite quantité de sucre se dissout dans l'eau (une phase); en grande quantité l'excès de sucre se dépose (deux phases). Il en est de même des solides qui peuvent

[†]Un corps est *homogène* lorsqu'il présente les mêmes propriétés (macroscopiques) en chacun de ses points : même pression, même température, même masse volumique, même constitution chimique, etc. Dans le cas contraire il est *hétérogène*.

[‡]On appelle "phase" toute partie homogène d'un mélange.

dissoudre d'autre corps, souvent en petite quantité seulement mais parfois en quantité notable[†].

Dans un nuage les gouttelettes d'eau restent en suspension. A l'échelle du centimètre le nuage est homogène ; il ne l'est pas à l'échelle du micromètre. De même un mélange d'air et de vapeur d'eau dans des conditions normales[‡] est homogène à l'échelle du micromètre, il ne l'est pas à l'échelle de l'angström.

A quel moment surgit la différence entre de l'air contenant de la vapeur d'eau (molécules H₂O) et de l'air contenant des agrégats de molécules d'eau (gouttelettes) en suspension ? La question est du même ordre que celle de savoir quel est le nombre minimal de grains de sable nécessaires pour former un tas de sable. Il n'y a pas de réponse universelle à ces questions mais dans la suite du cours, nous considérerons seulement des situations sans ambiguïtés.

1.3.2 Ordre et désordre.

Au niveau microscopique les matériaux se présentent comme des assemblages d'atomes ou de molécules qui peuvent être ordonnés ou non. La distinction "ordre ou désordre" est très fondamentale, plus fondamentale que la distinction entre liquide et vapeur par exemple.

La fig. 1.5 schématise diverses structures à deux dimensions plus ou moins ordonnées.

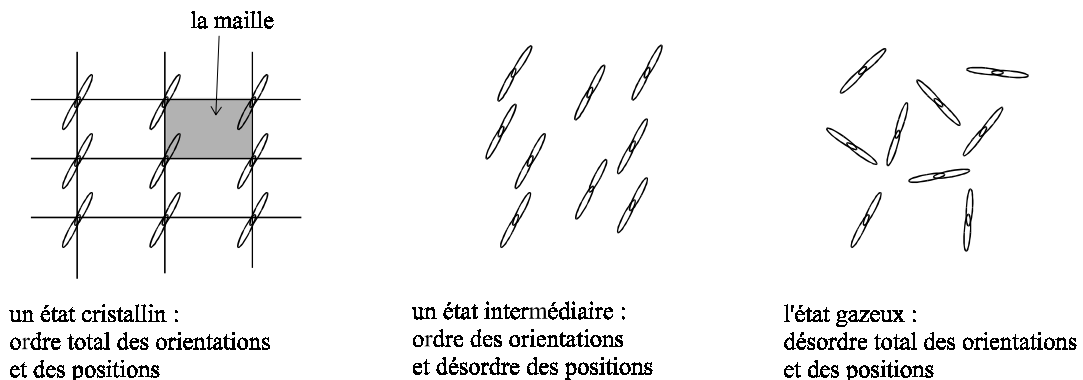


fig. 1.5 : Phases cristalline solide, phase nématique liquide et phase gazeuse.

Les structures cristallines sont des structures ordonnées dans lesquelles la maille, toujours la même, se reproduit par translation selon trois directions de l'espace pour constituer le réseau cristallin. On distingue 14 types de réseaux. Par exemple, si la maille est cubique et que les atomes se situent aux sommets du cube, le réseau est dit "cubique" ; s'il y a un atome en plus au centre du cube, le réseau est dit "cubique centré".

Un solide n'est pas nécessairement un cristal ; il peut être "*amorphe*" à l'instar d'un verre. Il présente alors une structure désordonnée. Ce peut être aussi un solide polycristallin formé d'un enchevêtrement de cristaux.

Les liquides présentent le plus souvent une structure désordonnée. Il existe cependant des états intermédiaires entre ordre et désordre, les cristaux liquides par exemple.

Un gaz présente généralement une structure désordonnée. La position des molécules et leur orientation sont aléatoires.

[†]C'est le cas du palladium avec l'hydrogène ou du fer avec le carbone. Dans un tel cas le mélange constitue une seule phase solide.

[‡]Les conditions normales sont définies par une température de 0 °C (soit 273 K environ) et une pression égale à 760 mm de mercure (soit 10⁵ Pa environ).

1.3.3 Distances intermoléculaires.

La masse volumique du fer (${}^{56}_{26}\text{Fe}$) est voisine de $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. La masse d'un atome de fer est $m = 56 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \simeq 9 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Le volume moyen dont dispose un atome de fer est donc $m/\rho \simeq 10^{-29} \text{ m}^3$. C'est le volume d'un cube de côté $d \simeq 2\text{\AA}$. Il est donc raisonnable d'estimer à 2\AA la distance interatomique. C'est de l'ordre de la dimension d'un atome. On peut donc admettre que les atomes sont au contact les uns des autres et assez fortement liés entre eux pour que le fer constitue un solide.

Un calcul analogue effectué avec de l'eau liquide (H_2O) donne la distance entre deux molécule $d \simeq 3\text{\AA}$. On peut admettre que les molécules sont très proches sans, cependant, être solidement reliées entre elles. Dans les liquides, les liaisons sont du type de celles décrites fig. 1.3 ; elles sont peu solides.

Pour un gaz, le résultat est différent. Dans les conditions normales une mole de gaz occupe un volume de 22,4 l. Le volume moyen occupé par une molécule est donc environ $3,7 \cdot 10^{-26} \text{ m}^3$. La distance entre molécules est voisine $d \simeq 30\text{\AA}$. C'est un ordre de grandeur de plus que la dimension d'un atome. Aucune interaction entre molécules ne porte à cette distance. On peut alors se demander comment ces molécules tiennent "en l'air" dans le champ de pesanteur terrestre. En fait l'immobilité d'un gaz au repos n'est qu'une apparence macroscopique. La théorie cinétique nous dit que ses molécules traversent l'espace dans tous les sens à grande vitesse ($\sim 500 \text{ m s}^{-1}$ pour les molécules d'oxygène de l'air dans les conditions normales).

1.4 Agitation thermique, température et pression dans les fluides

Il ne faut pas se représenter l'univers microscopique comme un univers immobile, c'est tout le contraire.

Dans les solides, les atomes vibrent autour de leur position d'équilibre ; il en est de même des molécules de liquide que l'on peut se représenter comme des petites billes qui s'attirent un peu les unes les autres[†], qui vibrent et qui roulent les unes sur les autres. Dans un gaz, les molécules sont animées de grandes vitesses, elle entrent en collision les unes avec les autres et avec les parois du récipient qui les contient. A la différence des solides et des liquides, leur environnement moléculaire change très rapidement et la distance entre deux molécules voisines est le plus souvent assez grande pour qu'aucune interaction entre molécules ne soit susceptible de s'établir pendant très longtemps. Des interactions entre molécules se produisent cependant lors des collisions ; elles permettent les réactions chimiques en phase gazeuse.

Pour sa part, *un gaz parfait* est un gaz dont les molécules peuvent être assimilées à des points matériels sans aucunes interactions mutuelles. Le gaz parfait est un modèle de référence très utile mais il faut garder présent à l'esprit que les gaz réels ne sont pas parfaits.

Cette description microscopique permet de comprendre la nature de multiples phénomènes macroscopiques.

Le "chaud" et le "froid". Les atomes d'une plaque chauffante vibrent. Nous y posons la main. Cette vibration agresse les cellules de notre peau et en provoque la destruction : c'est une brûlure. Si l'amplitude des vibrations est importante la plaque est "très chaude". On dit que sa "température" est élevée. Pour diminuer l'agitation thermique de la plaque il convient d'en abaisser la température.

[†]Lorsque l'agitation des molécules est grande, cette attraction cesse d'avoir un effet notable, les molécules s'éloignent les unes des autres et constituent un gaz..

Lorsque les atomes sont au repos, il n'est plus possible d'abaisser encore la température. Celle-ci est alors la température la plus basse que l'on puisse obtenir, c'est le "*zéro absolu*" ($T = 0 \text{ K}$)[‡].

La route vers l'équilibre. Cette agitation désordonnée liée à la température peut être produite par divers mécanismes. La transmission de l'agitation thermique (c'est à dire, en d'autres termes, la transmission de la chaleur) peut s'effectuer par contact comme dans l'exemple précédent mais aussi par rayonnement (émission de rayonnement par le foyer d'une cheminée et absorption de radiations infrarouges par les corps placés devant.).

Pour décrire les mécanismes qui conduisent à l'équilibre, considérons le cas d'un gaz dans une enceinte.

Les molécules du gaz traversent l'enceinte et heurtent une paroi. Si la température de la paroi est supérieure à celle du gaz, les vibrations des atomes de la paroi ont une amplitude assez importante pour rejeter les molécules de gaz avec une vitesse supérieure à leur vitesse initiale. Ainsi, l'énergie cinétique des molécules du gaz augmente : le gaz s'échauffe. Par contre, si la température du gaz est supérieure à celle de la paroi, ce sont les molécules de gaz qui transfèrent une partie de leur énergie cinétique aux atomes de la paroi. L'amplitude de vibration de ces atomes augmente et l'énergie cinétique des molécules de gaz diminue : le gaz se refroidit, la paroi s'échauffe.

Considérons un gaz "froid" et une paroi "chaude". Supposons que la paroi est reliée à un système qui restaure son état initial (d'agitation thermique) entre deux collisions. Un tel système est "un thermostat à température constante". Le même mécanisme d'échauffement du gaz se reproduit à chaque collision d'une molécule avec la paroi. Par ce mécanisme le thermostat fournit de l'énergie cinétique aux molécules du gaz. L'agitation thermique du gaz augmente. Celle-ci ne peut pas augmenter sans limite, en effet si l'agitation thermique du gaz devenait trop élevée, les collisions avec la paroi refroidiraient le gaz et en diminuerait l'agitation thermique. Il s'établit donc entre le gaz et le thermostat un *équilibre thermodynamique*. La température du gaz cesse d'évoluer ; elle est alors égale à la température du thermostat.

L'équilibre thermodynamique est un équilibre statistique qui concerne le comportement moyen des molécules. Ainsi, quelle que soit la température, on trouvera toujours des molécules de gaz ayant une vitesse élevée, mais celles-ci seront rares à basse température et nombreuses à haute température.

La chaleur. Pour élever la température d'un système (augmenter son agitation thermique et élever l'énergie mécanique microscopique correspondante), il faut lui fournir de l'énergie. Par contre, pour abaisser sa température il faut lui en retirer. Cette énergie répartie de façon désordonnée entre toutes les molécules est appelée "*chaleur*".

Les phénomènes décrits ci-dessus ont tout d'abord été étudiés à l'échelle macroscopique. La notion de chaleur était initialement distincte de la notion d'énergie. Pour atteindre l'équilibre thermique, deux corps devaient échanger de la chaleur (des calories). Il fallut les expériences de Joule pour démontrer l'équivalence $1 \text{ cal} \simeq 4,185 \text{ J}$.

Dilatation. Lorsque la température d'un liquide augmente, les molécules qui le constituent vibrent de plus en plus. Elles occupent un volume plus grand, comme des petites billes qui en vibrant au voisinage de leur position d'équilibre repousseraient celles

[‡]On atteint aujourd'hui des températures très basses (10^{-6} K), cependant le zéro absolu doit être considéré comme une limite plus que comme une valeur pratiquement réalisable.

Pour décrire certaines situations particulières on introduit parfois le concept de température négative. Nous n'en ferons pas usage dans ce cours.

qui leur sont proches. La conséquence en est une *dilatation*. Un mécanisme semblable provoque la dilatation des solides.

Lorsque la température varie de dT , la longueur ℓ d'une règle varie de $d\ell = \ell \alpha dT$ où α est le **coefficient de dilatation linéaire** du matériau (en K^{-1}). Un cube de côté a se dilate dans les trois directions; son volume $V = a^3$ subit une variation relative $dV/V = 3da/a = 3\alpha dT$. Le **coefficient de dilatation volumique** est $\lambda = 3\alpha$:

$$\boxed{d\ell = \alpha \ell dT, \quad dV \simeq \lambda V dT, \quad \lambda = 3\alpha} \quad (1.1)$$

Les coefficients de dilatation dépendent de la nature des matériaux et de leur composition (pour les alliages et les verres en particulier). A la pression atmosphérique, les coefficients de dilatation thermique varient avec la température. Le tableau suivant donne quelques exemples dans les conditions usuelles (pression atmosphérique et température ordinaire, voisine de 300 K).

Coefficients de dilatation volumique, λ

le mercure	l'eau	une huile	l'alcool
$1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Coefficients de dilatation linéaire, α

le zinc	un acier	un verre	un alliage invar	un granit	un bois
$3,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	$1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	$9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$9 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$	$9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

Températures. Mesurer la dilatation de la colonne de mercure d'un thermomètre, donne une indication sur l'agitation thermique qui l'anime et donc sur l'agitation thermique qui anime les corps en équilibre thermodynamique avec le thermomètre. C'est aussi un moyen pour définir une température permettant en particulier, de préciser les sensations physiologiques de "chaud" et de "froid". C'est d'une telle approche, basée sur la thermométrie, que nous viennent les échelles Celsius et Fahrenheit.

L'utilisation de thermomètres à gaz, à la limite des pressions nulles, a permis de définir et de mesurer la température absolue. La théorie cinétique des gaz permet de définir la température cinétique, T , tandis que la thermodynamique conduit à la définition de la température thermodynamique.

La température cinétique s'identifie à la température absolue et à la température thermodynamique. Le plus souvent, nous utiliserons le vocable "température" pour désigner l'une quelconque de ces trois températures sans autres précisions. L'unité en est le "kelvin" (K).

Vaporisation, fusion. Lorsque, dans un liquide, les vibrations deviennent importantes, les molécules de la surface s'éloignent assez pour ne plus être sensibles aux forces de cohésions (du type de celles de Van der Waals cf. ci dessus pages 5 et 6.). Elles quittent alors le liquide : c'est le phénomène de *vaporisation*[†]. L'énergie nécessaire pour vaporiser une mole de liquide est appelée "*chaleur molaire latente de vaporisation*".

Un mécanisme analogue produit la rupture des liaisons entre les atomes d'un corps solide : c'est le phénomène de fusion auquel est associé "*la chaleur latente de fusion*".

[†]Ne pas confondre vaporisation et pulvérisation ! La vaporisation est la transformation de liquide en vapeur. Elle peut s'effectuer de diverses manières, par évaporation ou ébullition par exemple.

Pression des gaz. Construisons un manomètre suivant la figure 1.6.

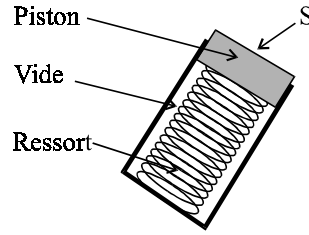


fig. 1.6 : Manomètre.

Dans un fluide, sous l'effet de la pression le piston s'enfonce. Son déplacement nous donne une mesure de la force, F , qui s'exerce sur le piston et donc de la pression $P = F/S$ où S est la surface du piston. En un lieu donné, la pression ne dépend pas de l'orientation du manomètre.

Dans un gaz, ce sont les chocs des molécules sur le piston qui le poussent. C'est donc l'agitation thermique qui est responsable de la pression d'un gaz.

La description microscopique de la matière ne remet pas en cause sa description macroscopique. Ainsi le théorème de Pascal permet d'obtenir la variation, avec l'altitude, de la pression dans un fluide, même si celle-ci trouve son origine dans l'agitation thermique.

Considérons un fluide macroscopiquement au repos (un gaz par exemple). Nous isolons par la pensée un petit cylindre de section S et de hauteur dh (figure 1.7). La hauteur dh est assez petite pour que la masse volumique ρ du fluide puisse être considérée comme constante dans le petit cylindre.

Ce cylindre est en équilibre dans le fluide où il est immergé. Son poids, $\rho g dh S$, doit être équilibré par une force de poussée vers le haut : la "**poussée d'Archimède**".

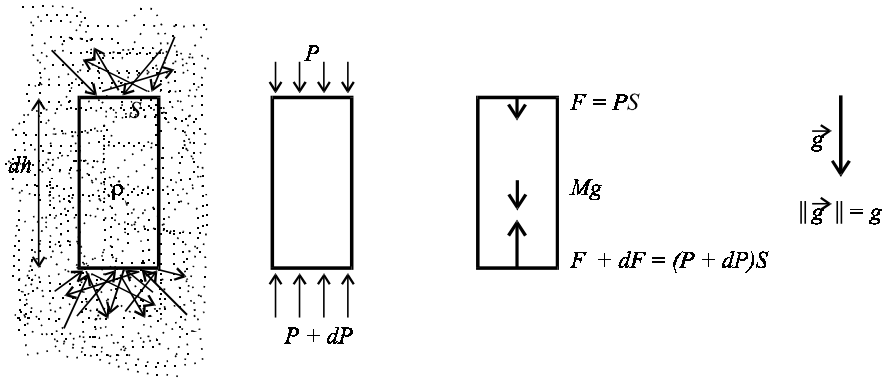


fig. 1.7

Nous pouvons imaginer que le petit cylindre est limité par une paroi sans masse. Les collisions sur les bases du cylindre y engendrent les pressions P et $P + dP$ tandis qu'à un même niveau horizontal les collisions produisent sur le parois latérales du cylindre des pressions dont les effets se compensent. Le cylindre étant au repos, la somme des forces auxquelles il est soumis est nulle. En projetant sur un axe vertical[†] on trouve

[†]Nous ne représentons pas les forces de pression sur la surface latérale du cylindre. Elles sont bien présentes mais elles s'annulent mutuellement.

$dP S = Mg = \rho g dh S$ où g est l'accélération de la pesanteur et Mg le poids du cylindre. On obtient alors le théorème de Pascal sous sa forme différentielle

$$\boxed{dP = \rho g dh}$$

Si ρ et g sont uniformes (c'est à dire indépendants de la position), la différence de pression entre deux points A et B dans le fluide se met sous la forme

$$\boxed{P_A - P_B = \rho g (z_B - z_A)} \quad (1.2)$$

où z_A et z_B sont les cotes des points A et B .

Cette relation est utilisée parfois pour exprimer les pressions en "millimètres de mercure". Un millimètre de mercure est appelé *un torr*. La masse volumique du mercure est $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Une pression de *1 torr* vaut $13,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3} \times 9,8 \text{ m s}^{-2} \times 1 \text{ mm} \simeq 133 \text{ Pa}$.

Chapitre 2

ANALYSE DIMENSIONNELLE

Les grandeurs physiques([†]) se distinguent par la nature de la quantité décrite par chacune d'elles. La taille d'un individu n'est pas de même nature que sa masse. Par contre, dans un rectangle, la longueur du petit coté et la longueur du grand coté sont deux grandeurs de même nature; ce sont toutes deux des longueurs qui s'expriment au moyen de la même unité, le mètre. On dit que chacune de ces grandeurs est **homogène à une longueur** où encore que leur **dimension physique** est une longueur.

Le produit d'une grandeur G par un nombre, la somme et la différence de deux grandeurs de même nature que G sont des grandeurs de même nature que G .

On ne peut additionner, soustraire et comparer que des grandeurs de même nature.

La mesure d'une grandeur physique est la comparaison de cette grandeur à un "**étalon**". L'ensemble des étalons constitue un système d'unités.

Le choix d'un étalon est guidé principalement par deux règles

1. L'étalon doit être reproductible.
2. La précision des mesures ne doit pas être limitée par le choix de l'étalon.

En 2005, l'étalon de masse est encore le kilogramme masse, un objet précieusement conservé par le Bureau International des Poids et Mesures au pavillon de Breteuil à Sèvres près de Paris. Sa température est maintenue constante et il est protégé de toutes les agressions possibles, oxydation, corrosion et érosions de toutes origines. Dans ces conditions, on admet qu'il reste sans modification au cours du temps, ce qui assure la reproduction à l'identique de cet étalon chaque fois qu'il est utilisé pour être comparé aux étalons secondaires (le moins souvent possible!).

Longtemps le mètre étalon a été conservé avec les mêmes précautions et au même endroit[‡] que le kilogramme étalon. Cependant, la précision avec laquelle les limites du mètre étaient définies et sa température maintenue stable devint insuffisante compte tenu des progrès dans les mesures de longueur. Une nouvelle définition plus précise fut donnée à partir de la longueur d'onde d'une raie optique aisément reproductible. De nouveaux progrès ont conduit à une nouvelle définition que nous donnons plus loin (page 17).

2.1 Dimensions physiques et unités

Dans tout système d'unités on distingue les grandeurs fondamentales et les grandeurs dérivées.

[†]Les grandeurs que nous considérons ici sont appelées "**grandeurs mesurables**".

[‡]en France, à Sèvre, pour des raisons historiques. Le système d'unités international est en effet l'héritier direct du système métrique dont la conception date d'un décret de l'assemblée constituante de 1790. Par ce décret, l'Académie des sciences était chargée d'améliorer les systèmes existants peu commodes et disparates.

A chaque **grandeur fondamentale** correspond un étalon, un symbole et une unité : voir par exemple le tableau ci-dessous des grandeurs fondamentales en mécanique.

Grandeur	Symbole	Unité SI
<i>Longueur</i>	<i>L</i>	<i>mètre</i> (m)
<i>Masse</i>	<i>M</i>	<i>kilogramme</i> (kg)
<i>Temps</i>	<i>T</i>	<i>seconde</i> (s)

Les **grandeurs dérivées** s'obtiennent par combinaisons des grandeurs fondamentales. Ainsi, on définit l'aire d'un rectangle comme le produit de sa longueur par sa largeur. Pour connaître l'aire d'un rectangle, il n'est pas nécessaire de définir un étalon (ce n'est pas interdit mais ce n'est pas nécessaire) car on peut combiner les résultats de mesures portant sur des grandeurs fondamentales pour obtenir le résultat. On dit que la surface est une grandeur dérivée.

A chaque grandeur dérivée correspond un symbole et une unité. La vitesse moyenne d'un mobile qui parcourt la distance D dans le temps Δt , est $v := D/\Delta t$; le symbole qui représente la vitesse, $[v]$, est obtenu en remplaçant chaque grandeur par son propre symbole dans l'expression de v , ce qui donne $[v] = L/T := LT^{-1}$. La relation $[v] = LT^{-1}$ est une "**équation aux dimensions**"[†].

L'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps; elle est obtenue en remplaçant dans le symbole de la vitesse, $[v]$, chaque symbole élémentaire, L et T , par l'unité correspondante. L'unité de vitesse est le "mètre par seconde" (m/s noté m s^{-1}).

Exemple :

Une force, F , est le produit d'une masse, m , par une accélération, γ .

On écrira symboliquement $[F] = [m] [\gamma]$ avec $[m] = M$ (voir le tableau ci-dessus).

Pour déterminer le symbole qui représente γ , on utilise la relation de définition $\gamma := \Delta v/\Delta t = \Delta v (\Delta t)^{-1}$ où Δv est la variation de vitesse d'un mobile pendant le temps Δt . Passant de la définition au symbole, il vient $[\gamma] = [\Delta v] [\Delta t]^{-1}$. Cependant $[\Delta v]$ est le symbole de la vitesse, $[\Delta v] := LT^{-1}$ tandis que $[\Delta t]$ est le symbole du temps : $[\Delta t] = T$. On en déduit $[\gamma] = (LT^{-1}) (T^{-1}) = LT^{-2}$ et $[F] = MLLT^{-2}$.

L'unité d'accélération, γ_u , est l'accélération d'un mobile dont la variation de vitesse est une unité de vitesse ($\Delta v = 1 \text{ m s}^{-1}$) pendant l'unité de temps ($\Delta t = 1 \text{ s}$). L'unité d'accélération est donc définie physiquement par sa description.

Pour obtenir le symbole de l'unité on utilise l'une quelconque des expressions de $[\gamma]$, par exemple $[\Delta v] [\Delta t]^{-1}$. On y remplace chaque symbole par le symbole de son unité et on regroupe les puissances d'un même symbole suivant les règles habituelles : $\gamma_u = 1(\text{m s}^{-1})(\text{s}^{-1}) = 1 \text{ m s}^{-2}$.

L'unité de force F_u , est la force qui, appliquée sur une masse unité ($m = 1 \text{ kg}$) provoque une accélération unité ($\gamma_u := 1 \text{ m s}^{-2}$). On obtient $F_u = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ (cette unité est appelée "le newton", N en abrégé).

Les systèmes d'unités ainsi obtenus à partir des unités fondamentales sont dits "**cohérents**". L'équation aux dimensions, et les unités, d'une grandeur quelconque (en mécanique) s'écrivent donc sous la forme

$$[Y] = M^\alpha L^\beta T^\gamma \quad \text{avec pour unité} \quad Y_u = \text{kg}^\alpha \text{ m}^\beta \text{ s}^\gamma$$

Toute grandeur Y telle que $[Y] = M^0 L^0 T^0$ est une "**grandeur sans dimension**". On pose dans ce cas $[Y] = 1$.

[†]Remarquer l'usage du mot "équation" dans un contexte inhabituel.

Les unités fondamentales du tableau ci-dessus doivent être complétées pour décrire des grandeurs physiques de nature nouvelle chaque fois que c'est nécessaire. Ainsi les grandeurs électriques s'introduisent à partir de la charge Q (en *coulombs*, en abrégé C) tandis que les grandeurs thermodynamiques nécessitent l'introduction de la température thermodynamique (en *kelvins*, en abrégé K).

En réalité, pour des questions de métrologie liées à la précision des étalons, ce n'est pas la charge qui constitue la grandeur fondamentale mais l'intensité, I , d'un courant. Celle-ci s'exprime en ampères (A). La relation $I = Q/\Delta t$ définit l'intensité, I , du courant qui débite une charge Q pendant le temps Δt . On en déduit $[I] = [Q]T^{-1}$ ou encore $A = Cs^{-1}$ soit $C = As$. Il est indifférent, pour les équations dimensionnelles d'utiliser $[I]$ ou $[Q]$, A ou C car il existe une correspondance biunivoque entre ces quantités.

De même, ce n'est plus le mètre et la seconde qui sont des grandeurs fondamentales mais la célérité de la lumière dans le vide, c_0 , et la seconde. Le déplacement d'un signal lumineux constitue un étalon naturel de vitesse; le mètre est maintenant un étalon secondaire. Il n'y a pas de nom pour désigner c_0 , donc pas de mot nouveau pour désigner les vitesses; on continue à employer l'ancienne terminologie (ms^{-1}).

Nous utiliserons dans ce cours le coulomb et le mètre comme unités fondamentales, quitte à remplacer en fin de calcul C par As, si nécessaire.

Il convient de retenir la règle pratique suivante : **les symboles dimensionnels et les unités se traitent comme des produits (ou des quotients) de quantités algébriques suivant les règles habituelles relatives aux puissances.**

2.2 Remarques

Certaines unités dérivées ont un nom, l'unité de force s'appelle le "newton". Une force s'exprimera donc sous la forme $F = 25N$ (car N est l'abréviation de "newton"). Certaines unités dérivées n'ont pas de nom, par exemple la quantité de mouvement mv d'une masse m animée de la vitesse v ; dans ce cas on écrira $mv = 47kgms^{-1}$. Si l'unité n'a pas de nom spécifique et que son symbole est très long, on se contente d'utiliser "SI" pour préciser que la valeur est donnée dans le système d'unités international.

Certaines grandeurs ont une unité mais n'ont pas de dimensions physiques, c'est le cas des angles. Les angles s'expriment en radians (rad). L'angle, θ , dont le sommet est au centre du cercle de rayon R et qui intercepte, sur ce cercle, un arc de longueur ℓ s'exprime en radians par le rapport $\theta := \ell/R$ soit $[\theta] = [\ell][R]^{-1} = L \cdot L^{-1} = L^0 = 1$.

Une vitesse angulaire, ω , est le rapport de l'angle de rotation θ au temps Δt nécessaire pour effectuer cette rotation : $\omega = \theta(\Delta t)^{-1}$. La vitesse angulaire s'exprime en $rad\ s^{-1}$. La dimension de ω est $[\omega] = [\theta][\Delta t]^{-1} = T^{-1}$. En utilisant les dimensions physiques d'une grandeur pour établir ses unités, on peut être conduit à commettre une faute d'usage : $[\omega] = T^{-1} \rightarrow s^{-1}$ au lieu de $rad\ s^{-1}$ qui est l'expression correcte. Cependant on ne commet aucune faute de physique. La situation est la même pour la constante des gaz parfaits, $R \simeq 8,31\ JK^{-1}\ mol^{-1}$ ou $R \simeq 8,31\ JK^{-1}$ car "mol" est un nombre de moles qui à l'instar de "rad" est sans dimensions.

Certaines grandeurs, très différentes de nature, ont les mêmes dimensions physiques. C'est par exemple l'activité d'un corps radioactif et la fréquence d'un signal périodique (Hz). L'activité du corps s'exprime en becquerels (Bq). C'est le nombre de désintégrations radioactives dans le corps par unité de temps; l'activité est donc homogène à T^{-1} à l'instar d'une fréquence.

Il est important d'utiliser les unités convenables et ne pas confondre Bq et Hz par exemple; le cas échéant ce serait le signe d'une profonde incompréhension du problème

traité.

Nous n'utiliserons que rarement les symboles dimensionnels, L , M , T , etc. Nous préférons utiliser les symboles des unités correspondantes du système international : m, kg, s, etc.

2.3 Applications

Les équations aux dimensions ont trois applications principales : les changements d'unités, la vérification de l'homogénéité d'une formule et l'obtention de lois physiques.

2.3.1 Changement d'unités.

Considérons une masse volumique $\rho = 2 \text{ kg m}^{-3}$. Nous voudrions exprimer ρ en grammes par centimètres cube. La correspondance entre les unités fondamentales est la suivante : $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ et $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$.

Nous remplaçons, dans l'expression de ρ , les symboles "kg" et "m" par leur valeur :

$$\begin{aligned}\rho &= 2 \text{ kg m}^{-3} = 2 (10^3 \text{ g}) (10^2 \text{ cm})^{-3} \\ &= 2 \cdot (10^3 \text{ g}) \cdot (10^{-6} \text{ cm}^{-3}) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-3}\end{aligned}$$

De façon générale **on remplace chaque unité par sa valeur dans le nouveau système.**

Remarquons que dans un changement d'unités la grandeur physique (ρ) ne change pas ; c'est le rapport à l'unité qui change et l'unité elle même mais leur produit reste le même. On vérifie également qu'**un nombre sans dimension conserve la même valeur, quel que soit le système d'unités cohérent utilisé pour son calcul.**

Attention ! Très souvent, apparaissent en physique des quantités de la forme Ae^X , $A \sin X$ ou $A \ln X$. En règle général les grandeurs X dans ces quantités sont des grandeurs sans dimensions. C'est A qui précise la nature de la grandeur physique considérée.

Attirons l'attention sur un abus d'écriture que l'on rencontre parfois dans les expressions du type $S + A \ln(C/C_0) = K$ où C et C_0 sont des grandeurs de même nature, S et C étant des grandeurs physiques variables selon le système considéré, tandis que A , C_0 et K sont des constantes.

On écrit $C = \overline{C} \text{SI}$ et $C_0 = \overline{C}_0 \text{SI}$ où SI représente l'unités du système international au moyen de laquelle s'expriment C et C_0 , tandis que \overline{C} et \overline{C}_0 représentent le nombre d'unités contenues dans les grandeurs C et C_0 . Le rapport C/C_0 s'écrit encore $(\overline{C} \text{SI})/(\overline{C}_0 \text{SI}) = \overline{C}/\overline{C}_0$ (car ici "SI" représente la même unité au numérateur et au dénominateur). On en déduit $S + A \ln(\overline{C}/\overline{C}_0) = S + A \ln \overline{C} - A \ln \overline{C}_0 = K$. Cette relation s'écrit encore $S + A \ln \overline{C} = K'$ où K' est une constante qui dépend des unités. Une telle expression rigoureusement correcte est parfois écrite sous la forme $S + A \ln C = cte$. L'apparition d'une grandeur dimensionnée, C , sous la fonction ln constitue un abus d'écriture.

2.3.2 Homogénéité des formules.

Un travail, W , est le produit d'une force, F , par un déplacement ℓ : $W = F\ell$. Dans un problème nous trouvons l'expression $F\ell = \frac{1}{2}mv^2$ où m est une masse et v une vitesse. Affirmer l'égalité, c'est effectuer une comparaison, celle-ci ne peut concerner que des grandeurs de même nature, donc de mêmes dimensions physiques. Est-ce le cas ? $[F] = \text{kg m s}^{-2}$, $[\ell] = \text{m}$. Le membre de gauche est homogène à $[W] = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Dans le membre de droite, $[\frac{1}{2}] = 1$ (pas de dimension), $[m] = \text{kg}$, $[v] = \text{m s}^{-1}$; le membre de

droite est homogène à $[\frac{1}{2}] [m] [v]^2 = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$. Les deux membres ont mêmes dimensions, la formule est homogène. Cela ne veut pas dire qu'elle est exacte; mais au moins elle n'est pas absurde! G étant une fonction quelconque, la même méthode s'applique aux expressions de la forme $F\ell - \frac{1}{2}mv^2 = \dots$ ou $G_{(F\ell - \frac{1}{2}mv^2)} = \dots$. Dans de telles formules on prétend additionner $F\ell$ et $-\frac{1}{2}mv^2$. Cela n'a de sens que si ces quantités sont de même nature; elles doivent donc être homogènes. La vérification de l'homogénéité est un moyen puissant pour détecter des erreurs. C'est un outil de correction pour un examinateur, ce doit donc être un outil de vérification pour l'étudiant.

2.3.3 Lois physiques.

L'analyse dimensionnelle permet dans certains cas de trouver l'allure des lois physiques, quand on connaît les grandeurs qui interviennent.

Premier exemple. Un pendule simple est constitué d'un fil sans masse, de longueur ℓ , fixé à l'une de ses extrémités tandis que l'autre extrémité se termine par une masse m quasiment ponctuelle. Dans le champ d'accélération de la pesanteur terrestre, le pendule oscille d'un mouvement périodique de période T . Quelle est l'expression de T ?

1. Recherchons tous les paramètres physiques qui jouent un rôle dans l'expression de T . Le pendule revient vers sa position d'équilibre chaque fois qu'il en est éloigné sous l'effet de l'attraction terrestre qui s'exerce sur la masse m . Il est donc vraisemblable que g et m jouent un rôle dans l'expression de T . En outre, l'observation courante nous apprend que les pendules courts ont une période plus brève que les pendules long. Nous ajoutons donc ℓ à la liste des paramètres.

2. Ecrivons T sous la forme $T = \varphi \cdot m^x \ell^y g^z$ où φ est un nombre sans dimension. Imposons l'homogénéité de cette expression. $[T] = \text{s}$, $[\varphi] = 1$, $[m] = \text{kg}$, $[\ell] = \text{m}$, $[g] = \text{m s}^{-2}$. Il vient donc

$$\text{s} := \text{s}^1 = \text{kg}^x \text{m}^y (\text{m s}^{-2})^z = \text{kg}^x \text{m}^{(y+z)} \text{s}^{(-2z)}$$

L'homogénéité implique $x = 0$, $y + z = 0$, $-2z = 1$. On en déduit $x = 0$, $y = 1/2$ et $z = -1/2$, d'où

$$T = \varphi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

La formule correcte est $T = 2\pi \sqrt{\ell/g}$. L'analyse dimensionnelle nous a donné la forme de la loi et nous a appris que la période est indépendante de m .

Supposons que nous ajoutions à la liste des paramètres physiques la célérité, V , des ondes élastiques dans le fil. Nous écrivons T sous la forme $T = m^x \ell^y g^z V^u$; l'homogénéité implique

$$\text{s} = \text{kg}^x \text{m}^y (\text{m s}^{-2})^z (\text{m s}^{-1})^u = \text{kg}^x \text{m}^{(y+z+u)} \text{s}^{(-2z-u)}$$

On trouve $x = 0$, $y + z + u = 0$, $-2z - u = 1$. Remarquons que l'on en déduit $x = 0$. A ce stade on peut seulement affirmer que T est indépendant de la masse m . C'est déjà un résultat important mais on ne peut pas en savoir plus car nous disposons de deux équations seulement pour déterminer les trois inconnues y , z et u . L'efficacité de l'analyse dimensionnelle dépend donc crucialement de la liste des grandeurs physiques dont on suppose qu'elles jouent un rôle dans le problème étudié. Cette liste doit être complète, sans redondance et aussi courte que possible.

Deuxième exemple. La masse du Soleil attire les objets en son voisinage. Un projectile sera donc dévié par l'attraction solaire. L'angle de déviation θ est sans doute une fonction de la vitesse initiale du projectile, v , les projectiles les plus rapides étant les moins déviés. C'est très certainement une fonction de G , constante newtonienne de la gravitation et M , masse du Soleil (car si l'un des deux était nul aucune attraction ne serait présente);

enfin θ dépend aussi de la distance minimale du Soleil, R , à laquelle passe le projectile car un projectile lointain ne serait pas sensible à l'attraction solaire. θ est une grandeur sans dimension ce qui suggère $\theta = \Psi(u)$ où Ψ est une fonction inconnue et u un nombre sans dimension fonction de v , G , M et R . On écrit $u = G^x M^y R^z v^w$. La loi de Newton ($F = Gmm'/r^2$) nous donne la dimension de G : $[F] = \text{kg m s}^{-2} = [G][\text{kg}]^2[\text{m}]^{-2}$. On en déduit $[G] = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$. La variable u étant sans dimension, il vient

$$[u] = 1 = (\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2})^x \text{kg}^y \text{m}^z (\text{m s}^{-1})^w$$

d'où les relations $3x + z + w = 0$, $y - x = 0$, $2x + w = 0$ soit $y = x$, $w = -2x$, $z = -x$. On obtient $u = \left(\frac{GM}{Rv^2}\right)^x$. On ne connaît pas x mais cependant la relation $\theta = \Psi(u)$ peut s'écrire sous la forme $\theta = \Theta\left(\frac{GM}{Rv^2}\right)$ où Θ est une fonction inconnue. Lorsque les effets sont petits, R très grand par exemple, on peut donner un développement[†] de θ sous la forme $\theta \simeq \Theta(0) + \Theta'(0)\frac{GM}{Rv^2}$. En l'absence de gravitation ($G = 0$) la déviation est nulle d'où $\Theta(0) = 0$, de plus $\Theta'(0)$ est un nombre sans dimension que l'on note φ . On trouve donc $\theta = \varphi \frac{GM}{Rv^2}$.

Dans le cas considéré, le résultat correct est $\theta = 2\frac{GM}{Rv^2}$.

Retenons que l'analyse dimensionnelle est un outil puissant qui peut apporter des informations utiles sur la forme des lois physiques mais ne permet pas en général de les déterminer avec précision. Il subsiste toujours au moins un nombre sans dimension, φ , dans l'expression des lois obtenues. Bien qu'il n'y ait aucune raison à cela, on constate que ce nombre diffère rarement de l'unité de plus d'un ordre de grandeur : $\varphi = 2\pi \sim 10$ dans le premier exemple cité et $\varphi = 2 \sim 1$ dans le second.

[†] Voir le fascicule "Introduction, rappels et compléments", les développements de Taylor et de McLaurin section 5.3.