

Deuxième partie

Outils mathématiques

Chapitre 5 LES FONCTIONS

5.1 Fonctions remarquables.

Certaines fonctions doivent être bien connues. Ce sont
Les trois fonctions trigonométriques $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$.

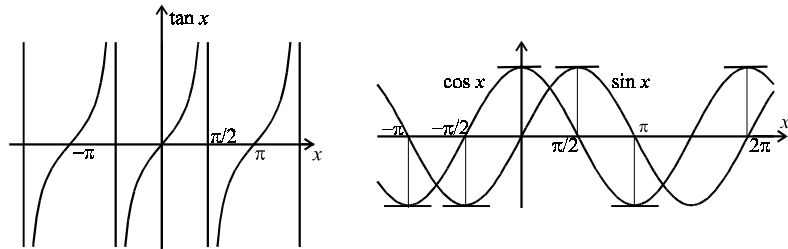


fig. 5.1 : Fonctions trigonométriques.

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

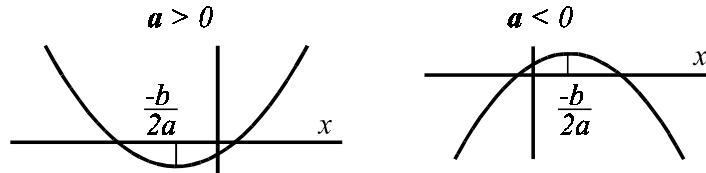


fig. 5.2 : $y = ax^2 + bx + c$

Remarquons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour racines l'abscisse des points d'intersection de la parabole avec l'axe des x .

L'absence de solution ($b^2 - 4ac < 0$) se traduit donc par l'absence de ces points.

L'hyperbole d'équation $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

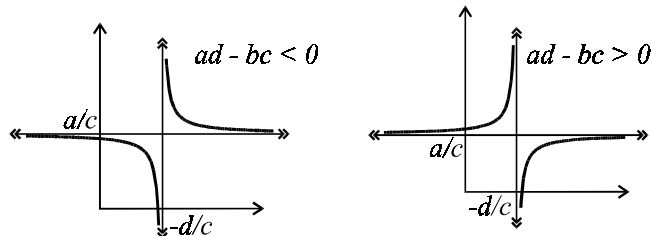


fig. 5.3 : $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

La fonction exponentielle et la fonction logarithme

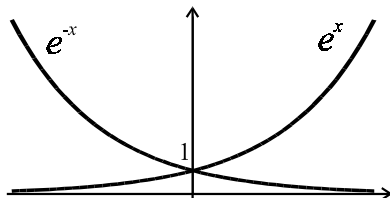


fig. 5.4 : Exponentielles.

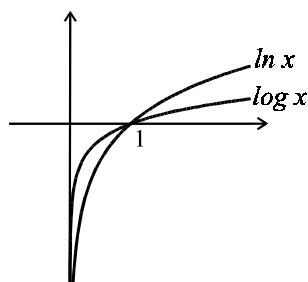


fig. 5.5 : Logarithmes.

Deux cas particuliers se rencontrent très souvent.

1. La fonction f est la somme, $f = g + h$, de deux fonctions, l'une, $g(x)$, croissante, l'autre, $h(x)$, décroissante et tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.

Dans les cas intéressants en physique, la fonction f admet souvent un minimum. Lorsque $x \rightarrow \infty$, les fonctions f et g deviennent arbitrairement voisines car $h \rightarrow 0$. Un exemple est donné fig. 5.6.

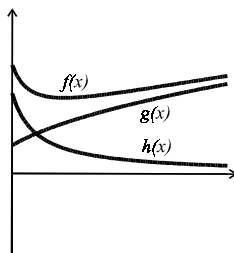


fig. 5.6

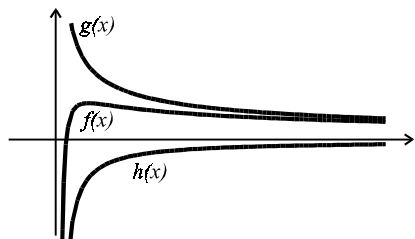


fig. 5.7

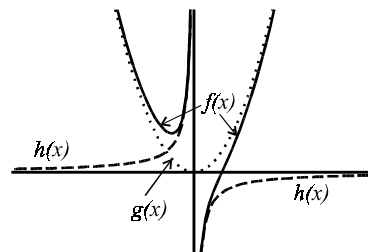


fig. 5.8

2. La fonction f est la somme de deux fonctions : $g(x) = ax^n$ et $h(x) = bx^m$ avec $n > m$.

• Pour x voisin de l'origine on pose $f = bx^m (1 + (a/b)x^{n-m})$. L'exposant $n - m$ étant positif il vient $x^{n-m} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Dans ce cas $f \propto bx^m = h(x)$.

• Pour $x \rightarrow \infty$ on pose $f = ax^n (1 + (b/a)x^{m-n})$. L'exposant $m - n$ est négatif ; x^{m-n} devient négligeable lorsque $x \rightarrow \infty$. On trouve $f \propto ax^n = g(x)$.

La figure 5.7 représente le cas $g(x) = 3/\sqrt{x}$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = -1/2$ et $m = -1$).

La figure 5.8 représente le cas $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = -1/x$ (ici $n = 2$ et $m = -1$).

5.2 Dérivées

Rappelons sans démonstration les principales formules concernant le calcul de dérivées. Ces expressions se rencontrent souvent et **il convient de les mémoriser**.

La variable est ici x et nous posons $\frac{d}{dx}(\) := (\)'$.

n et a sont des constantes ; $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions de x .

$y =$	a	ax	x^n	$\frac{1}{x} := x^{-1}$	$\sqrt{x} := x^{1/2}$	$y =$	e^{ax}	$\ln(ax)$
$y' =$	0	a	nx^{n-1}	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y' =$	ae^{ax}	$\frac{1}{x}$

$y =$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
$y' =$	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

$y =$	$au + v$	$u \cdot v$	$\frac{u}{v}$	$f[u(x)]$	u^n
$y' =$	$au' + v'$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	$\frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	$u' \cdot \left(\frac{df(u)}{du} \right)_{u(x)}$	$nu' u^{n-1}$

Il faut toujours prendre garde à la variable par rapport à laquelle s'effectue la dérivation. En mathématiques, f désigne une fonction ; la notation f' pour la fonction dérivée est donc sans ambiguïté : f étant considérée comme fonction de la variable z , on utilisera indifféremment la notation f' ou $\frac{df}{dz}$. En physique, la notation $\frac{df}{dz}$ est préférable car f désigne une grandeur et non une fonction. Cette grandeur peut être considérée comme fonction de telle ou telle variable. Par exemple, dans un système de coordonnées convenable, $x = r \cos \theta$ est l'abscisse d'un point matériel animé d'un mouvement circulaire dont l'abscisse angulaire est θ (cf. page 8.4.1 ; r est une constante). Si le mouvement est uniforme, l'angle θ est une fonction du temps, t : fonction de la forme $\theta = \omega t + \varphi$ où ω est la vitesse angulaire (ω et φ sont des constantes). Il vient donc $x = r \cos(\omega t + \varphi)$. Dans ces conditions la notation x' pour désigner la dérivée de x est ambiguë car il convient de distinguer clairement $\frac{dx}{d\theta} = -r \sin(\omega t + \varphi)$ et $\frac{dx}{dt} = -r\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

5.3 Développements de Taylor et de MacLaurin

Développement de Taylor.

Considérons une fonction $f(x)$. Seules nous intéressent les valeurs de x voisines de $x = a$. On pose $x := a + \delta x$ (soit $\delta x := x - a$). Une première approximation consiste à admettre $\tilde{f}(a + \delta x) = f(a)$ où \tilde{f} est une estimation de f .

Lorsque la dérivée $f'(a)$, de la fonction f , est non nulle en $x = a$, une meilleure approximation consiste à remplacer le graphe de f par sa tangente en $x = a$ et à poser $\tilde{f}(a + \delta x) = f(a) + f'(a) \delta x$.

Cette relation se généralise sous la forme

$$\tilde{f}(a + \delta x) = f(a) + \left(\frac{df}{dx} \right)_a \delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_a \delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_a \delta x^n \quad (5.1)$$

où $n!$ est "factoriel n " : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1^\dagger$.

Cette formule est la **formule de Taylor**. Elle permet de remplacer une fonction par un polynôme au voisinage d'une valeur quelconque de la variable. Le degré du polynôme est appelé "ordre du développement" (ci-dessus, c'est n) on dit aussi que 5.1 est un "**développement limité à l'ordre n** " de la fonction $f(x)$.

L'erreur commise est $e := \left| \tilde{f}(a + \delta x) - f(a + \delta x) \right|$. On démontre que e est "négligeable" si n est "assez grand" et $|\delta x|$ "assez petit".

Bien entendu, un tel développement ne peut s'obtenir que pour des fonctions suffisamment régulières (dérivables jusqu'à l'ordre $n+1$ pour un développement limité à l'ordre n).

Les développements que l'on rencontre le plus souvent sont limités au premier ou au deuxième ordre.

Développement de MacLaurin des fonctions usuelles.

Le développement de Taylor dans le cas $a = 0$ est appelé "développement de MacLaurin". Dans ce cas $\delta x = x - a = x - 0 = x$.

Donnons quelques exemples courants de développements de MacLaurin (les expressions encadrées doivent être sues sans hésitation).

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} + \dots$
$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \dots - x^{2n+1} + x^{2n} + \dots$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$
$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \dots$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \dots$
$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots$

[†]On pose en général $0! = 1$, ce qui permet de généraliser de nombreuses formules.

5.4 Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables

Dérivées partielles d'ordre 1.

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$. Considérons que y est donné : $y = y_0$. La fonction f est alors fonction de la seule variable x . La dérivée de f par rapport à x est appelée "**dérivée partielle**" de f ; elle est notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x, y_0)}$; c'est une fonction de x seulement car y_0 est fixé. On peut cependant, **après avoir calculé la dérivée partielle**, considérer que y_0 peut prendre une valeur arbitraire y . On obtient alors une fonction des deux variables x et y : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x, y)}$ que l'on note plus simplement $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

De même, on peut définir la fonction $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Dérivées partielles d'ordre supérieurs à 1.

Etant donnée une fonction de deux variables, $f(x, y)$, les dérivées partielles du premier ordre $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ sont des fonctions des deux variables x et y . On peut les dériver à leur tour. On obtient les dérivées partielles du second ordre. Il y en a quatre. Nous en donnons la liste ci-dessous

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &: = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &: = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &:= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

On démontre cependant la relation $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Cette propriété, connue comme le "**lemme de Schwartz**", est très généralement vérifiée pour la plupart des fonctions que l'on rencontre en physique[†]. Selon ce lemme, l'ordre dans lequel on effectue les dérivations est sans importance.

On peut continuer à dériver et calculer les dérivées du troisième ordre :

On remarquera les égalités $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, ce qui est une conséquence du lemme de Schwartz appliqué à f et à ses dérivées.

Dans le calcul d'une dérivée partielle d'ordre quelconque d'une fonction suffisamment régulière, **le résultat ne dépend pas de l'ordre des dérivations**.

[†]Fonctions dérivables deux fois à dérivées continues.

Chapitre 6 LES DIFFÉRENTIELLES

6.1 Fonction d'une seule variable

Considérons la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = a$. Posons $x = a + \delta x$. Le développement 5.1, limité au premier ordre donne l'estimation

$$\tilde{f}_1(x) = f(a) + f'(a) \cdot \delta x.$$

δx est **la variation de la variable** x (lorsqu'elle passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$\delta f := f(x) - f(a)$ est **la variation de la fonction** f (lorsque x passe de la valeur a à la valeur $a + \delta x = x$).

$df := \tilde{f}_1(x) - f(a) := f'(a) \cdot \delta x$ est, par définition, " **la différentielle de la fonction** " f en $x = a$. C'est une fonction de δx .

• Considérons la fonction particulière $f(x) = x$; sa différentielle est notée indifféremment df ou dx . Dans ce cas, $f'(a) = 1$ et la définition $dx = df = f'(a) \cdot \delta x$ donne $dx = df := 1 \cdot \delta x$ soit $\boxed{dx = \delta x}$. **Nous utiliserons cette notation par la suite.**

$$\boxed{df = f'(x) \cdot dx} \tag{6.1}$$

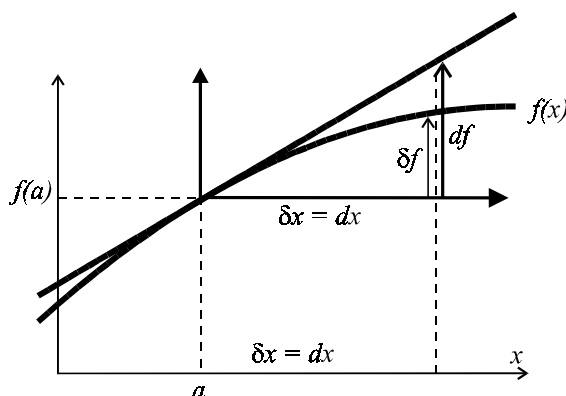
En divisant les deux membres de l'égalité précédente par dx nous retrouvons la notation

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

La notation $\frac{df}{dx}$ ne représente pas seulement une écriture commode, c'est aussi le rapport df / dx de deux différentielles.

6.1.1 Représentation graphique.

La différentielle et la variation d'une fonction au voisinage de $x = a$ peuvent être interprétées graphiquement (fig.6.1).

fig. 6.1 : Différentielle df , et variation δf .

Sur la figure précédente il est aisé de saisir la raison pour laquelle df et δf sont voisins lorsque $\delta x = dx$ est assez petit.

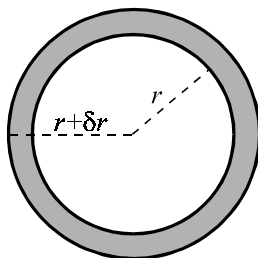
6.1.2 Petites variations.

Lorsque $dx = \delta x$ est "assez" petit, nous admettons la relation

$$\delta f \simeq df := \left(\frac{df}{dx} \right)_a dx$$

Cette approximation est équivalente à celle qui consiste à identifier la fonction f à son développement de Taylor du premier ordre ou à identifier le graphe de f à sa tangente en $x = a$. Justifions cette approximation sur un exemple.

Exemple. L'aire d'un cercle de rayon x est $A = \pi x^2$. Lorsque x varie de r à $r + \delta r$, l'aire du cercle subit la variation δA représentée par l'anneau circulaire gris de la figure 6.2.

fig. 6.2 : $dA = 2\pi r dr$.

La différentielle de A est $dA = 2\pi x dx$. Sa valeur pour $x = r$ et $dx = \delta r$ est $dA = 2\pi r \delta r$. La variation de A est $\delta A = \pi (r + \delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \delta r + \pi \delta r^2$. Le terme $2\pi r \delta r$ est du premier degré relativement à δr ; on dit que c'est **un terme du premier ordre**; $\pi \delta r^2$ est du second degré relativement à δr ; c'est **un terme du second ordre**. En posant $\delta f \simeq df$ on commet l'erreur $e = \pi \delta r^2$: **l'erreur est du second ordre**. Lorsque δr est petit ($\delta r \ll r$), l'erreur relative est $\frac{\delta r}{2r} \ll 1$. Elle est négligeable et tend vers zéro avec δr .

6.2 Fonction de plusieurs variables

Considérons $f(x, y, z, t)$, fonction de quatre variables. Soit M_0 l'ensemble des 4 valeurs données (x_0, y_0, z_0, t_0) . On définit la différentielle de f , en M_0 , de la façon suivante

$$df := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt$$

La différentielle df est une fonction linéaire des 4 variables arbitraires dx, dy, dz et dt tandis que les dérivées partielles sont des constantes calculées en M_0 .

La définition se généralise à un nombre quelconque de variables. Dans le cas des fonctions d'une seule variable on retrouve la définition de la section précédente.

Si on ne spécifie pas la valeur numérique de x_0, y_0 , etc, on écrit (en abandonnant l'indice " 0 ")

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

En physique on est souvent conduit à étudier de petites quantités notées parfois δG ou dG . Ce ne sont pas nécessairement les différentielles d'une fonction. Mais lorsque dG est la différentielle d'une fonction, pour insister sur ce point qui s'avère souvent important, on spécifie que c'est **une différentielle totale**.

Etant donnée une forme différentielle

$$\delta G = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

le lemme de Schwartz fournit une condition nécessaire pour que ce soit une différentielle totale. En effet si δG est la différentielle d'une fonction f , alors $A(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $B(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, ce qui implique $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$. Il en découle la condition

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, y)$$

On peut démontrer que cette condition nécessaire est également suffisante.

Ici encore, les petites variations sont pratiquement égales aux différentielles. Plus précisément, étant donnée une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, lorsque les variations $\delta x = dx, \delta y = dy, \delta z = dz, \dots$ sont assez petites, il vient

$$\delta f \simeq df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots$$

où δf est la variation de f .

Exemple. L'aire, F , d'un rectangle de côtés x et y est $F = xy$.

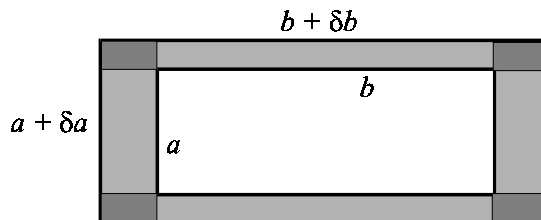


fig. 6.3

Le rectangle intérieur de la figure 6.3 a pour aire $F_0 = ab$. Le rectangle extérieur a pour aire $F_1 = (a + \delta a)(b + \delta b)$. La valeur exacte de l'accroissement est $\delta F = F_1 - F_0 = (a\delta b + b\delta a) + \delta a\delta b$. C'est l'aire de la bande grise (gris clair et gris foncé) entre les deux rectangles. δF est la somme de deux termes. Le terme $(a\delta b + b\delta a)$ ne contient que des termes du premier degré relativement aux accroissements δa et δb : c'est le terme du **premier ordre**. Le terme $\delta a\delta b$ est du second degré par rapport à δa et δb : c'est le terme du **second ordre**.

La différentielle de F en $(x = a, y = b)$ est $dF = a dy + b dx$, sa valeur pour $dx = \delta a$ et $dy = \delta b$ est $dF = a\delta b + b\delta a$. C'est l'aire des quatre rectangles gris clair. La différentielle de F fournit le terme du premier ordre de δF . En posant $\delta F \simeq dF$ on commet une erreur absolue du second ordre (de l'ordre de $\delta a \times \delta b$) : c'est l'aire des quatre rectangles gris foncé. Lorsque les variations sont petites ($\delta a \ll a$ et $\delta b \ll b$) cette erreur est négligeable comparée au terme du premier ordre que constitue la différentielle.

6.3 Expressions remarquables

Soient u et v deux fonctions d'une ou plusieurs variables et a une constante. En utilisant les définitions et les propriétés précédentes on obtient

$u = cte \iff du = 0$	$d(u + av) = du + adv$
$d(uv) = u dv + v du$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$
$d(u^n) = n u^{n-1} du$	$d \ln u = \frac{du}{u}$

Considérons la quantité $F = u^n \cdot v^m \cdot \dots$. Il vient $\ln |F| = n \ln |u| + m \ln |v| + \dots$

Nous calculons les différentielles de chaque membre (ce que l'on appelle **la différentielle logarithmique de F**).

En utilisant les relations $d \ln |F| = \frac{dF}{F}$ ainsi que $d \ln |u| = \frac{du}{u}$ et $d \ln |v| = \frac{dv}{v}$, nous obtenons

$$\boxed{F = u^n \cdot v^m \cdot \dots \implies \frac{dF}{F} = n \frac{du}{u} + m \frac{dv}{v} + \dots} \quad (6.2)$$

6.4 Calcul d'incertitudes

Considérons une grandeur physique, F , fonction de deux variables, x et y , que l'on mesure. Le résultat des mesures fournit les estimations \tilde{x} et \tilde{y} des vraies grandeurs x et y . Nous posons $x = \tilde{x} + \delta x$ et $y = \tilde{y} + \delta y$. Nous ne connaissons ni δx ni δy . Nous savons seulement que ces quantités satisfont les relations $|\delta x| < \Delta x$ et $|\delta y| < \Delta y$. Les incertitudes Δx et Δy sont connues ou tout au moins estimées convenablement.

De tels résultats s'expriment sous la forme $x = \tilde{x} \pm \Delta x$ et $y = \tilde{y} \pm \Delta y$.

Nous cherchons à estimer F et son incertitude. La quantité $\tilde{F} := F(\tilde{x}, \tilde{y})$ est une estimation de F . Au premier ordre il vient

$$F - \tilde{F} = \delta F \simeq dF = \tilde{F} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \delta y.$$

La seule indication que nous ayons est $|\delta x| < \Delta x$; c'est à dire $-\Delta x < \delta x < \Delta x$, ce qui implique

$$-\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \Delta x < \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \delta x < \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \Delta x.$$

De même

$$-\left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \Delta y < \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \delta y < \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \Delta y.$$

En additionnant membres à membres les inégalités précédentes nous obtenons $-\Delta F < dF \simeq \delta F < \Delta F$ avec

$$\Delta F := \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \cdot \Delta x + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\tilde{x}, \tilde{y})}\right| \cdot \Delta y$$

On écrit ce résultat sous la forme

$$F = \tilde{F} \pm \Delta F$$

La quantité ΔF est une estimation de l'incertitude sur F .

Chapitre 7 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

7.1 Définition et propriétés des primitives

Soient deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ de la variable x . On dit que F est une *primitive* de f si $f = \frac{dF}{dx}$.

Par exemple $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$. On dira que $\sin x$ est une primitive de $\cos x$

$$F = \text{primitive de } f \Leftrightarrow F'(x) := \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Les primitives, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ d'une même fonction $f(x)$ diffèrent d'une constante

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

où C est une constante arbitraire.

En outre on vérifie aisément les relations

$$\left. \begin{array}{l} U(x) = \text{primitive de } u(x) \\ V(x) = \text{primitive de } v(x) \\ a = \text{constante} \end{array} \right\} \Rightarrow U + aV = \text{primitive de } (u + av)$$

Les tableaux ci-dessous donnent une primitives des fonctions usuelles

Fonction $f =$	a	$x^n \ (n \neq -1)$	$x^{1/2} = \sqrt{x}$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$
Primitive de $f =$	ax	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\ln x $

Fonction $f =$	e^{ax}	$\frac{u'}{u}$	$\ln x $
Primitive de $f =$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\ln u $	$x \ln x - x$

Fonction $f =$	$\sin(ax)$	$\cos(ax)$	$\tan(ax) = \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}$
Primitive de $f =$	$-\frac{1}{a} \cos(ax)$	$\frac{1}{a} \sin(ax)$	$-\frac{1}{a} \ln \cos(ax) $

7.2 Définition et propriétés des intégrales

Considérons la fonction $f(x)$ et les deux valeurs $x = a$ et $x = b$. L'intervalle $[a, b]$ est divisé en n intervalle élémentaires dont les extrémités sont :
 $x_0 = a, x_1 = a + \delta x, \dots, x_k = a + k \delta x, \dots, x_n = a + n \delta x = b$ avec $\delta x = (b - a)/n$.

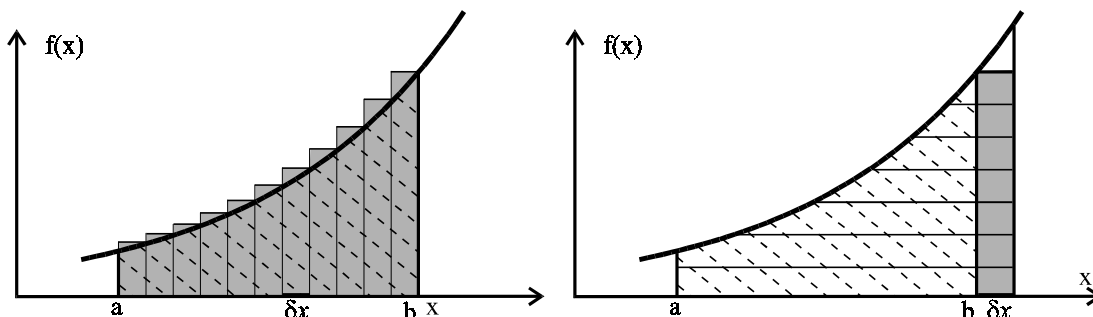


fig. 7.1

Nous considérons $I_n = f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + \dots = \sum f(x_k)\delta x$. La somme I_n représente l'aire grise des rectangles de la première figure 7.1. Lorsque $n \rightarrow \infty$ (c'est à dire $\delta x \rightarrow 0$) l'aire grise se confond avec l'aire hachurée de la figure 7.1, comprise entre le graphe de $f(x)$ et l'axe des x . Cette limite est l'**intégrale définie** $I = \int_a^b f(x)dx$.

Remarquons que le **nom de la variable d'intégration est indifférent** :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

On démontre les relations suivantes

$$\int_a^b (g + \lambda h)(t) dt = \int_a^b g(t) dt + \lambda \int_a^b h(t) dt$$

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad \text{et donc} \quad \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$

valables quelles que soient les positions relatives des points d'abscisse a, b et c .

Lorsque la fonction $f(x)$ ne conserve pas un signe constant, certains termes de la somme I_n sont positifs, d'autres sont négatifs. L'aire I apparaît donc comme une **aire algébrique**.

Nous donnons un exemple ci-dessous (figure 7.2)

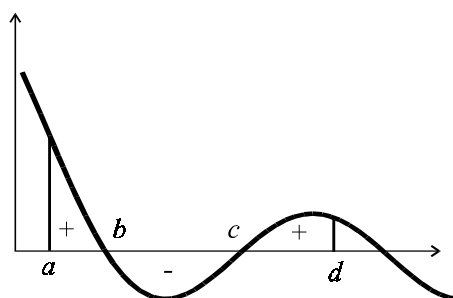


fig. 7.2

L'intégrale $\int_a^d f(x) dx$ où $f(x)$ est représentée sur la figure 7.2, se décompose en une somme de trois intégrales : $\int_a^d = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^d$. Ces intégrales satisfont les relations $\int_a^b f(x) dx > 0$, $\int_b^c f(x) dx < 0$ et $\int_c^d f(x) dx > 0$.

L'intervalle d'intégration peut être découpé en segments sur lesquels le signe de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est sans ambiguïté. Nous représentons divers cas possibles sur la figure 7.3 et nous donnons la règle qui fournit le signe de l'intégrale.

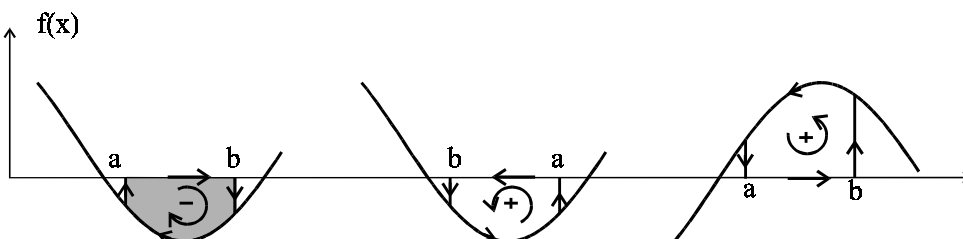


fig. 7.3

Dans le premier cas, $f(x) < 0$ et $b > a$, l'intégrale est négative. Cette intégrale représente l'aire algébrique de la surface grise. Le contour qui borde cette surface est orienté par continuité à partir de la flèche sur l'axe des x . L'orientation est rétrograde ; elle fixe le signe de l'intégrale. On vérifie aisément dans les deux autres cas que l'orientation du bord est celle du sens direct ; les intégrales correspondantes sont positives.

On peut considérer que b , borne supérieure de l'intégrale est une variable, x (fig. 7.1). Dans ce cas l'intégrale est une fonction de x :

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t) dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \Phi(x) = f(x)$$

La fonction $\Phi(x)$ est une primitive de $f(x)$. C'est la primitive telle que $\Phi(a) = 0$.

Soit $F(x)$ une primitive quelconque de $f(x)$. On démontre les relations

$$\boxed{F(x) = \Phi(x) + C} \quad \boxed{\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b}$$

où C est une constante.

On remarque la relation $f(t)dt = dF$. On pose donc en général $\int dF = F + C$

Chapitre 8 LES VECTEURS

8.1 Repérage de l'espace

8.1.1 Orientation d'un plan et d'un trièdre.

Etant donné un plan, P , on choisit un vecteur, \vec{u} , orthogonal à ce plan. Deux choix sont possibles. Le vecteur \vec{u} étant choisi, on dispose alors **la main droite** comme il est indiqué sur la figure 8.1. L'orientation positive des angles du plan s'en déduit.

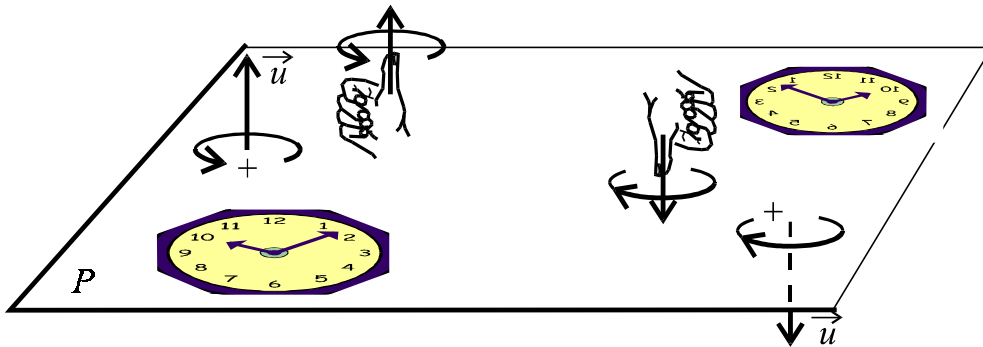


fig. 8.1 : Les deux orientations possibles d'un plan.

Considérons maintenant trois vecteurs non coplanaires, \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 de même origine. Le plan formé par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est orienté de telle sorte que le sinus de l'angle (\vec{v}_1, \vec{v}_2) soit positif. On en déduit le vecteur unitaire, \vec{u} , qui oriente le plan.

Si le vecteur \vec{v}_3 est dans le même demi-espace que \vec{u} , le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est un "**trièdre direct**" dans le cas contraire le trièdre est "**rétrograde**".

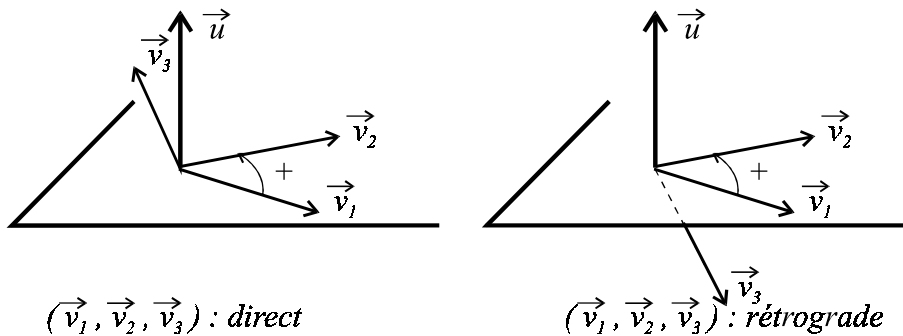


fig. 8.2 : Trièdres direct et rétrograde.

Attention! L'ordre des vecteurs est important. Si le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est direct il en est de même de $(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$ mais $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2)$ est alors rétrograde ainsi que $(-\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, par exemple.

8.1.2 Repères.

Pour repérer la position des points de l'espace, on se donne un trièdre orthonormé direct, $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et un point O , choisi comme origine. Le point M est repéré par les composantes (x, y, z) du vecteur $\vec{OM} : \vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$. Les trois valeurs x , y et z sont les "**coordonnées cartésiennes**" du point M associées au repère donné (l'abscisse est x , l'ordonnée est y et la cote est z).

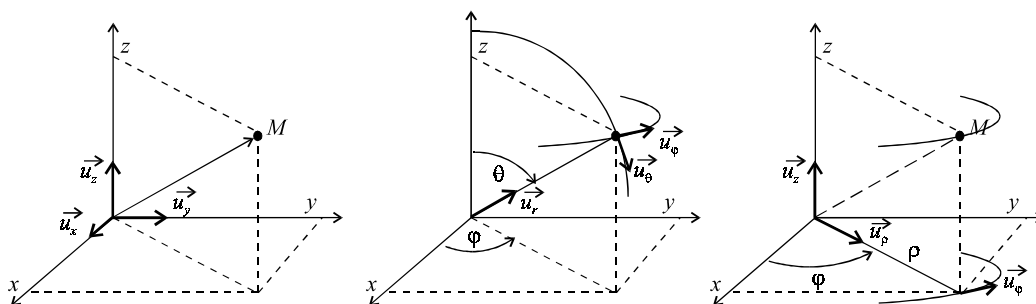


fig. 8.3 : Coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques.

Les **coordonnées sphériques** sont r, θ et φ .

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad \text{avec} \\ r &\geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

M étant repéré par ses coordonnées sphériques, on définit le repère "local" $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui est un repère orthonormé direct (cf. fig. 8.3)

On utilise aussi les **coordonnées cylindriques** ρ, φ, z où le trièdre local $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Remarquons que les vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ de la représentation sphérique et les vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ de la représentation cylindrique dépendent du point M considéré[†] tandis que les trois vecteurs de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de la représentation cartésienne ne dépendent pas du point, M .

8.2 Produits scalaire et vectoriel

8.2.1 Produit scalaire de deux vecteurs.

Etant donnés deux vecteurs, \vec{V} et \vec{V}' leur produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ est **un nombre** tel que

$$\boxed{\vec{V} \cdot \vec{V}' = \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \cos \theta}$$

où $\|\vec{V}\|$ et $\|\vec{V}'\|$ sont les normes des vecteurs tandis que θ est l'angle des deux vecteurs.

[†]Pour cette raison les repères introduit en représentation sphérique et cylindrique ont été qualifié de "local".

Introduisons \vec{U} , projection orthogonale de \vec{V} sur la direction de \vec{V}' et \vec{U}' , projection orthogonale de \vec{V}' sur la direction de \vec{V} (fig. 8.5). Il vient

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \vec{U} \cdot \vec{V}' = \vec{V} \cdot \vec{U}'$$

Le produit scalaire ne dépend pas de l'ordre des vecteurs : il ne dépend pas du signe de θ mais de celui de $\cos \theta$.

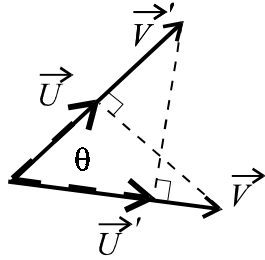


fig. 8.5 : $\vec{V} \cdot \vec{V}' > 0$.

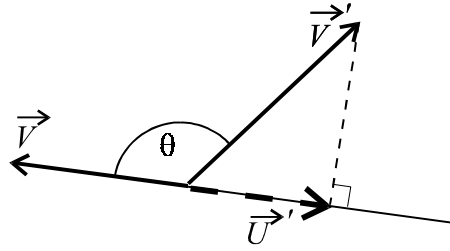


fig. 8.6 : $\vec{V} \cdot \vec{V}' < 0$

Le produit scalaire s'exprime en fonctions des composantes de \vec{V} et \vec{V}' dans une base orthonormée sous la forme

$$\vec{V} \cdot \vec{V}' = X X' + Y Y' + Z Z' = \vec{V}' \cdot \vec{V}$$

Rappelons également la propriété suivante

$$\vec{V} \cdot (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2) = \vec{V} \cdot \vec{V}_1 + a \vec{V} \cdot \vec{V}_2$$

où a est un nombre.

8.2.2 Produit vectoriel.

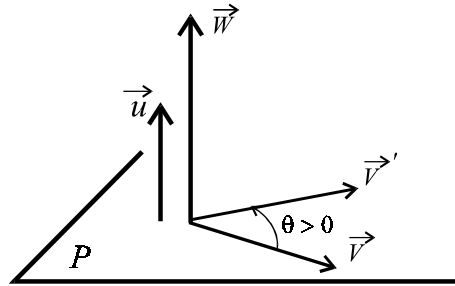
Etant donnés deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' , le produit vectoriel de ces vecteurs est **un vecteur** \vec{W} noté $\vec{V} \wedge \vec{V}'$, défini de la façon suivante :

1. Si \vec{V} et \vec{V}' sont parallèles, $\vec{W} = \vec{0}$.
2. Si \vec{V} et \vec{V}' ne sont pas parallèles, ils définissent un plan P (cf. fig. 8.7). Nous choisissons un vecteur unitaire \vec{u} orthogonal à ce plan. Ce vecteur définit une orientation des angles dans P . Soit θ l'angle (orienté) (\vec{V}, \vec{V}') . Par définition on pose

$$\vec{W} := \vec{V} \wedge \vec{V}' = \|\vec{V}\| \|\vec{V}'\| \sin \theta \cdot \vec{u}$$

Remarquons qu'à la limite $\theta \rightarrow 0$ on retrouve le cas 1. ci-dessus.

Deux orientations sont possibles pour le vecteur \vec{u} . Si on change le signe de \vec{u} , on change l'orientation du plan P et donc le signe de θ . Le produit $\sin \theta \cdot \vec{u}$ reste inchangé ainsi que le produit vectoriel. La définition de $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ ne dépend donc pas de la convention concernant l'orientation du plan P .

fig. 8.7 : $\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$

On vérifie que le trièdre $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{W})$ est direct.

Les propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

$\vec{V} \wedge \vec{V}' = -\vec{V}' \wedge \vec{V}$
$\vec{V} \wedge (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2) = \vec{V} \wedge \vec{V}_1 + a \vec{V} \wedge \vec{V}_2$

où a est un nombre.

$\vec{V} \wedge \vec{V}' = (YZ' - ZY') \vec{u}_x + (ZX' - XZ') \vec{u}_y + (XY' - YX') \vec{u}_z$

Remarque : $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ est un repère orthonormé direct. On vérifie les relations

$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x, \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$
--

8.2.3 Quelques remarques.

- L'orthogonalité des vecteurs \vec{V} et \vec{V}' se traduit par la nullité de leur produit scalaire : $\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$.
- La projection orthogonale du vecteur \vec{V} sur un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u} s'écrit

$$\text{Proj}_{\vec{u}} [\vec{V}] = (\vec{V} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$

La mesure algébrique de la projection orthogonale de \vec{V} sur l'axe orienté par \vec{u} est donc $(\vec{V} \cdot \vec{u})$.

- Lorsque deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' sont proportionnels ($\vec{V} = a \vec{V}'$) on trouve $\vec{V} \wedge \vec{V}' = \vec{0}$. Cette propriété permet de reconnaître le parallélisme de deux vecteurs.

- L'aire A du triangle construit sur \vec{V} et \vec{V}' comme côtés s'exprime sous la forme $A = \frac{1}{2} \|\vec{V} \wedge \vec{V}'\|$.

- Le volume V , du tétraèdre construit sur \vec{V}, \vec{V}' et \vec{V}'' comme côtés s'écrit $V = \frac{1}{6} |\vec{V} \cdot (\vec{V}' \wedge \vec{V}'')|$.

- Le nombre $\vec{V} \cdot (\vec{V}' \wedge \vec{V}'')$ est appelé "produit mixte" de \vec{V}, \vec{V}' et \vec{V}'' pris dans cet ordre. Le produit mixte est positif si le trièdre $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ est direct ; il est nul lorsque les vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires).

8.3 Différentielles et dérivées

L'un des domaines d'application des vecteurs en physique est l'étude des mouvements.

Afin d'étudier le mouvement d'un mobile, il faut décider ce qu'est un **référentiel fixe** : nous devons choisir une origine, O , et un trièdre orthonormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ que nous déclarons être fixes. Les mouvements étudiés seront alors les **mouvements par rapport à ce référentiel**.

Comment choisir concrètement le référentiel fixe ? Les critères sont soit de nature mathématique, dans ce cas c'est une question de définition et de vocabulaire, soit de nature physique et alors la recherche d'un référentiel fixe s'identifie à la recherche d'un référentiel privilégié dans lequel les lois de la physique seront "aussi simple que possible".

Longtemps on a considéré que le référentiel lié à la Terre était le "bon" référentiel. C'était acceptable pour décrire la physique terrestre mais pas pour comprendre les mouvements des planètes. Le repère héliocentrique s'imposa. De toutes façons, avec l'amélioration des performances expérimentales, il aurait fallu abandonner le repère terrestre, en l'absence même de toutes considérations astronomiques.

8.3.1 Définitions.

Le référentiel fixe étant choisi, considérons un mobile ponctuel, M . Le vecteur \vec{OM} varie avec le temps (ses composantes (X, Y, Z) sont des fonctions du temps).

On peut, sans considération de temps, imaginer également des vecteurs dont les coordonnées sont fonction d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, le vecteur \vec{u}_φ introduit ci-dessus (fig. 8.3) est fonction de la variable φ , tandis que les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ dépendent des deux variables θ et φ .

Considérons le vecteur $\vec{V} = X \vec{u}_x + Y \vec{u}_y + Z \vec{u}_z$ dont les composantes sont des fonctions de la variable t . La différentielle de \vec{V} est le vecteur $d\vec{V}$

$$d\vec{V} := dX \vec{u}_x + dY \vec{u}_y + dZ \vec{u}_z$$

$d\vec{V}$ représente la variation du vecteur \vec{V} lorsque ses composantes varient respectivement de dX, dY, dZ .

La dérivée de \vec{V} par rapport à t est, par définition,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} := \frac{dX}{dt} \vec{u}_x + \frac{dY}{dt} \vec{u}_y + \frac{dZ}{dt} \vec{u}_z$$

8.3.2 Propriétés.

Les propriétés des différentielles et des dérivées sont résumées ci-dessous.

$$\begin{aligned} d(\vec{V} + f \vec{W}) &= d\vec{V} + df \vec{W} + f d\vec{W} \implies \\ \frac{d}{dt} (\vec{V} + f \vec{W}) &= \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{df}{dt} \vec{W} + f \frac{d\vec{W}}{dt} \end{aligned} \quad (8.1)$$

où $f = f(t)$ est une fonction de la variable t .

$$\begin{aligned} d(\vec{V} \cdot \vec{W}) &= d\vec{V} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot d\vec{W} \implies \\ \frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot \vec{W}) &= \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \frac{d\vec{W}}{dt} \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} d(\vec{V} \wedge \vec{W}) &= d\vec{V} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge d\vec{W} \implies \\ \frac{d}{dt}(\vec{V} \wedge \vec{W}) &= \frac{d\vec{V}}{dt} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \frac{d\vec{W}}{dt} \end{aligned}}$$

Exemple. Le vecteur $\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y$ (cf. fig. 8.3) est un vecteur de norme constante dont la dérivée par rapport à φ est le vecteur

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y = \vec{u}_\varphi.$$

On peut vérifier que \vec{u}_φ est orthogonal à \vec{u}_ρ . C'est généralement le cas lorsqu'on dérive un vecteur de norme constante.

En effet, soit $\vec{u} = \vec{u}(t)$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{u} = C$ et $\vec{n} := \frac{d\vec{u}}{dt}$. La relation $\vec{u} \cdot \vec{u} = C$ implique $\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$. En utilisant la relation 8.2 il vient $0 = \frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \frac{d}{dt} \vec{u} = 2 \vec{u} \cdot \vec{n}$. Les vecteurs \vec{n} et \vec{u} sont donc orthogonaux..

8.4 Eléments de cinématique et de dynamique

8.4.1 Trajectoire.

Considérons un mobile ponctuel, en mouvement par rapport à un référentiel fixe, orthonormé et direct $\{O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$.

L'ensemble des points de l'espace successivement occupés par M dans son mouvement est "**la trajectoire**" du mobile.

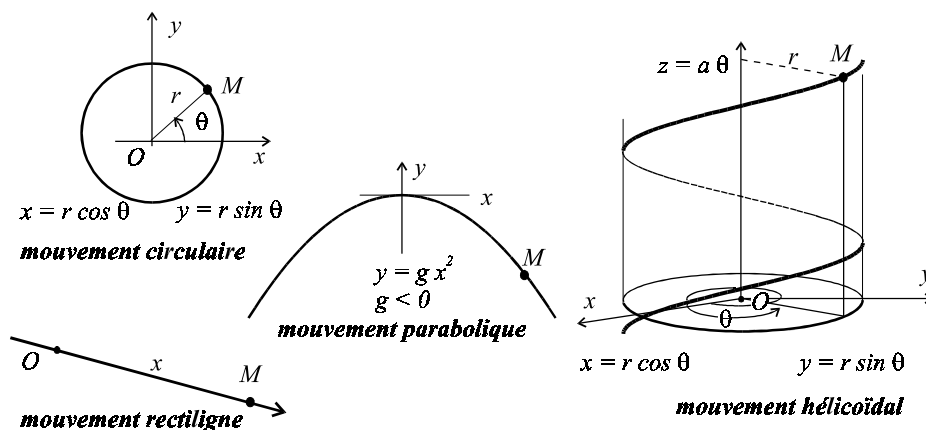


fig. 8.8 : Trajectoires.

La figure 8.8 montre divers types de trajectoires. Sur chacune d'entre elles la position du mobile dépend d'un paramètre géométrique, x ou θ .

Connaître la trajectoire de M , ne suffit pas à connaître son mouvement. Pour savoir comment est décrite[†] la trajectoire il faut connaître la façon dont le paramètre dépend du temps, t , ou encore la façon dont les coordonnées de M varient avec le temps.

[†]Lentement ou rapidement, avec éventuellement des arrêts, des allers et retours, etc...

8.4.2 Vitesse (m s^{-1}).

Supposons que les coordonnées de M soient des fonctions connues du temps : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. On définit la vitesse, \vec{v} de M .

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{X} \vec{u}_x + \dot{Y} \vec{u}_y + \dot{Z} \vec{u}_z} \quad (8.3)$$

où " $\dot{(\)}$ " est employé comme symbole de dérivation temporelle.

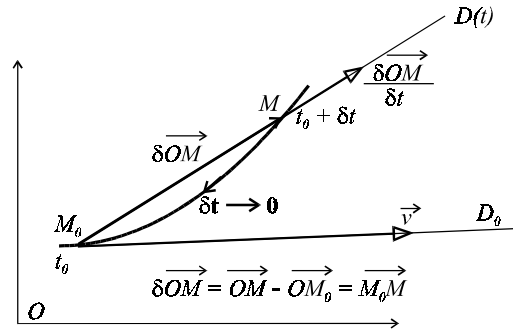


fig. 8.9

Sur la figure 8.9 nous avons représenté la position du mobile à l'instant t_0 (en M_0) et à l'instant $t = t_0 + \delta t$ (en M). La vitesse est $\vec{v} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{OM}}{\delta t}$. Le vecteur $\delta \vec{OM}$ est porté par $D(t)$, par conséquent \vec{v} est porté par $\lim_{\delta t \rightarrow 0} D(t) = D_0$: **La vitesse d'un mobile ponctuel est un vecteur tangent à sa trajectoire.**

Le temps ne joue ici aucun rôle particulier. Si la trajectoire est paramétrée au moyen de x ou θ comme dans les exemples de la figure 8.8 le résultat reste vrai : $\frac{d\vec{OM}}{dx}$ ou $\frac{d\vec{OM}}{d\theta}$ est tangent à la trajectoire de M .

8.4.3 Equation horaire et vitesse.

On utilise parfois *l'abscisse curviligne*, s , pour repérer les points de la trajectoire. On choisit comme origine un point Ω sur la trajectoire. On choisit en outre une orientation de la trajectoire.

L'abscisse curviligne d'un point M est la longueur de l'arc de trajectoire ΩM affecté d'un signe comme nous le précisons sur la figure 8.10

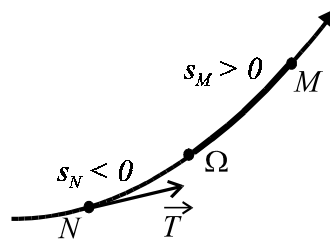


fig. 8.10

Le mouvement du mobile sur sa trajectoire est caractérisé par la fonction $t \mapsto s(t)$. La fonction $s(t)$ est appelée " *équation horaire* ".

Si \overrightarrow{OM} est considéré comme une fonction de s , le vecteur $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ est un vecteur unitaire (dirigé dans le sens des s croissants).

On définit "*la vitesse algébrique*" v

$$v = \frac{ds}{dt}$$

On écrit alors

$$\overrightarrow{v} := \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = v \overrightarrow{T}$$

Le vecteur \overrightarrow{T} étant unitaire, on en déduit $\overrightarrow{v}^2 = v^2$ soit $|v| = \|\overrightarrow{v}\|$. C'est cette valeur qui est indiquée par le compteur de vitesse d'une automobile.

Attention! Le mot "vitesse" désigne trois grandeurs différentes : \overrightarrow{v} , v et $|v|$. Lorsqu'il y a risque de confusion il faut préciser "**vecteur vitesse**" pour \overrightarrow{v} , "**vitesse algébrique**" pour v et "**vitesse tachymétrique**"[†] pour $|v|$.

8.4.4 Accélération (ms^{-2}).

On définit l'accélération $\overrightarrow{\gamma}$ du mobile comme la dérivée de sa vitesse par rapport au temps :

$$\overrightarrow{\gamma} := \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{X} \overrightarrow{u}_x + \ddot{Y} \overrightarrow{u}_y + \ddot{Z} \overrightarrow{u}_z$$

L'accélération joue un rôle important en physique car le principe fondamental de la dynamique postule l'existence de référentiels tels que

$$\overrightarrow{F} = m \overrightarrow{\gamma}$$

où $\overrightarrow{\gamma}$ est l'accélération d'une masse ponctuelle, m , sur laquelle s'exerce la force \overrightarrow{F} . Cette loi est la seconde loi de Newton.

Les référentiels particuliers dans lesquels la loi de Newton est valable sont "**les référentiels galiléens**".

Le mouvement apparent des étoiles lointaines (des unes par rapport aux autres) est quasiment imperceptible. Ces étoiles forment ce que l'on appelle "la sphère des fixes". Le référentiel géocentrique, dont l'origine est au centre de la Terre et dont les axes pointent vers des étoiles de la sphère des fixes constitue un référentiel que l'on peut considérer comme galiléen pour la plupart des expériences terrestres.

Le référentiel dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire et dont les axes pointent vers des étoiles de la sphère des fixes constitue un référentiel quasiment galiléen, adapté à l'étude des mouvements planétaires.

Si un référentiel, R , est galiléen, on démontre de façon générale que sont également galiléens tous les référentiels dont la vitesse par rapport à R est constante. Ce n'est pas le cas pour les deux référentiels cités car la Terre possède (par rapport au second référentiel) un mouvement quasi circulaire autour du Soleil, sa vitesse par rapport au second référentiel change donc de sens tous les 6 mois et n'est donc pas constante. En

[†]Un tachymètre est un compteur de vitesse.

réalité, chacun de ces référentiels est seulement quasi galiléen. Existe-t-il un référentiel rigoureusement galiléen ? Quelle est cette mystérieuse relation entre les étoiles lointaines et les expériences terrestres ? Autant de questions difficiles dont nous ne possédons pas la réponse.

8.4.5 Etude de quelques mouvements.

a- Le mouvement rectiligne sinusoïdal. Le mouvement est rectiligne, la trajectoire est donc une droite Ox . L'abscisse curviligne, s , du mobile sur sa trajectoire se confond avec l'abscisse, x , du point M sur l'axe Ox .

Le mouvement est sinusoïdal. Cela signifie que x est une fonction sinusoïdale du temps t : $x = a \sin(\omega t + \varphi) + x_0$ où x_0 , a , ω et φ sont des constantes.

1. a est l'**amplitude du mouvement** (m). Nous posons $a > 0$.
2. $(\omega t + \varphi)$ est la **phase** (nombre sans unité fonction du temps t). ω est la **pulsation** (s^{-1}). Nous posons $\omega > 0$.
3. φ est la **phase à l'origine des temps** (sans unité). Nous posons $\varphi = 0$.

Les conditions posées ne restreignent en rien la généralité du mouvement étudié.

1. $a \sin(\omega t + \varphi) = -a \sin(\omega t + \varphi + \pi)$. Ainsi le choix de la phase à l'origine des temps (φ ou $\varphi + \pi$) permet de choisir une amplitude positive (a ou $-a$ selon le signe initial de a).

2. $a \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\pi - \omega t - \varphi)$. Cette relation permet d'imposer une pulsation positive en choisissant la phase à l'origine des temps sous la forme φ ou $\pi - \varphi$ selon le signe initial de ω .

3. Un changement de l'origine des temps $t = t' - \varphi/\omega$ donne $\omega t + \varphi = \omega t'$. En utilisant pour t' la notation t , il vient $x = a \sin \omega t + x_0$ (avec $a > 0$ et $\omega > 0$).

4. En posant $X = x - x_0$ nous effectuons un changement de l'origine des abscisses sur l'axe Ox . Si nous utilisons la notation x pour désigner X , le mouvement prend la forme

$$x = a \sin \omega t \text{ avec } a > 0 \text{ et } \omega > 0$$

Le mouvement est périodique. Il se reproduit identiquement après la durée T qui est la "période" :

$$\text{période (s) : } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ , fréquence (Hz) : } \nu := \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Le point M oscille entre les abscisses $-a$ et $+a$ dans une succession d'allers et retours sans fin.

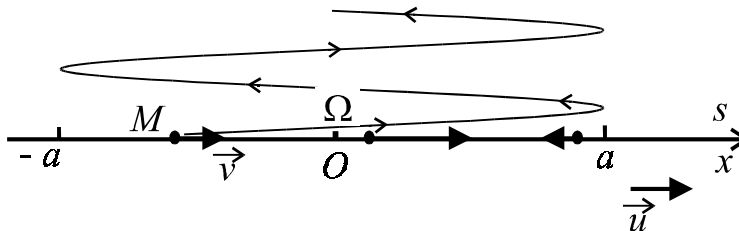


fig. 8.11

En introduisant le vecteur unitaire \vec{u} qui oriente l'axe Ox , il vient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x \vec{u} \text{ avec } x = a \sin \omega t = s \\ \vec{v} &= v \vec{u} \text{ avec } v = \frac{ds}{dt} = a\omega \cos \omega t \\ \vec{\gamma} &= \frac{d\vec{v}}{dt} := \gamma \vec{u} \text{ avec } \gamma = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x\end{aligned}$$

L'équation horaire est représentée par le graphe de la fonction $s = a \sin \omega t$. Dans le diagramme t - s , cette courbe est une sinusoïde.

Ce mouvement est par exemple le mouvement d'une masse soumise à la force de rappel d'un ressort.

Remarque : Les fréquences s'expriment en hertz (Hz), les pulsations ω en s^{-1} , bien que parfois on utilise les radians par secondes ($\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$) comme pour les vitesses angulaires. Ceci s'explique car $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ où la phase $\psi = \omega t + \varphi$ s'exprime en radians et le temps t en secondes.

b- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré. La trajectoire est une droite Ox . Comme précédemment $x = s$; en outre

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v &= at + v_0 \\ \gamma &= a\end{aligned}$$

où a , v_0 et x_0 sont des constantes.

Remarquons la relation $\frac{dv}{dt} := \frac{d^2s}{dt^2} = \gamma = \text{constante}$. Cette relation est synonyme de l'expression "uniformément accéléré".

L'équation horaire est représentée par une parabole dans le diagramme t - s .

Ce mouvement est, par exemple, le mouvement vertical de chute libre d'une masse dans le champ de pesanteur terrestre.

c- Le mouvement circulaire uniforme. La trajectoire est un cercle tandis que l'angle θ de la figure 8.12 vaut $\theta = \omega t$.

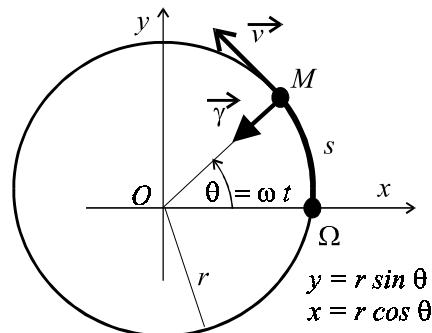


fig. 8.12

L'équation horaire est $s = r\theta = r\omega t$. Sa représentation dans un diagramme t - s est une droite de pente $r\omega$, passant par l'origine.

En utilisant l'expression $\overrightarrow{OM} = r \cos \theta \overrightarrow{u}_x + r \sin \theta \overrightarrow{u}_y$, et les relations précédentes, il vient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \overrightarrow{u}_x + r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \overrightarrow{u}_y \text{ avec } s = r\theta \text{ et } \theta = \omega t \\ \overrightarrow{T} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \overrightarrow{u}_x + \cos\left(\frac{s}{r}\right) \overrightarrow{u}_y = -\sin \theta \overrightarrow{u}_x + \cos \theta \overrightarrow{u}_y \\ v &= \frac{ds}{dt} = r\omega \text{ et } \overrightarrow{v} = v \overrightarrow{T} = -r\omega \sin(\omega t) \overrightarrow{u}_x + r\omega \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_y\end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_x + r \sin(\omega t) \overrightarrow{u}_y \\ \overrightarrow{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -r\omega \sin(\omega t) \overrightarrow{u}_x + r\omega \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_y \\ \overrightarrow{\gamma} &= \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_x - r\omega^2 \sin(\omega t) \overrightarrow{u}_y = -\omega^2 \overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Le vecteur vitesse n'est pas constant ($\overrightarrow{\gamma} \neq 0$) mais la vitesse (algébrique) est constante ($v = r\omega$). Les mouvements dont la vitesse (algébrique) est constante sont appelés "**mouvements uniformes**".

Vocabulaire. Dans ce qui suit a , v_0 et s_0 sont des constantes. Un mouvement *parabolique uniforme* est le mouvement d'un mobile dont la trajectoire est une parabole (dans l'espace) et dont l'équation horaire, $s = v_0 t + s_0$, est représenté par une droite (dans le diagramme $t-s$) tandis qu'un mouvement *rectiligne uniformément accéléré* est le mouvement d'un mobile dont la trajectoire est une droite (dans l'espace) et dont l'équation horaire, $s = at^2/2 + v_0 t + s_0$, est une parabole (dans le diagramme $t-s$). Un mouvement *circulaire uniformément accéléré* a pour trajectoire un cercle. Quant à la représentation de son équation horaire dans le plan $t-s$, c'est une parabole d'équation $s = at^2/2 + v_0 t + s_0$.

Attention! Sur la figure 8.12 il est possible de vérifier l'orthogonalité de \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{v} ou le parallélisme de \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{\gamma}$, il est possible de comparer leurs sens mais il n'est pas possible de comparer $\|\overrightarrow{v}\|$, $\|\overrightarrow{\gamma}\|$, $\|\overrightarrow{OM}\| = r$ car ces trois grandeurs sont de nature différentes (elles ont des unités différentes). Ainsi en modifiant l'échelle de représentation des accélérations, $\overrightarrow{\gamma}$ pourrait être représenté par un vecteur de longueur très supérieure à celle de \overrightarrow{OM} .

8.5 Champs de vecteurs

Certaines grandeurs physiques sont représentées par des vecteurs, c'est le cas de la vitesse d'un mobile ponctuelle, de son accélération ou de la force qui agit sur un solide. Parfois, la connaissance du vecteur associé à une grandeur physique ne suffit pas à sa description.

Dans le cas d'une force, si nous connaissons le vecteur associé \overrightarrow{F} , c'est à dire sa direction, son sens et son intensité, nous ne pouvons pas prédire complètement son effet tant que nous ne connaissons pas son point d'application, A . On définit **la ligne d'action de la force** comme la droite, D , parallèle à \overrightarrow{F} qui passe par A . L'expérience montre que la force \overrightarrow{F} appliquée en un autre point B de sa ligne d'action produit le même effet. Une

force est donc définie par l'ensemble $\{\vec{F}, D\}$ on dit que c'est **un vecteur glissant** car on peut faire glisser la force le long de sa ligne d'action sans en modifier l'effet.

Considérons maintenant le cas d'une répartition donnée de charges électriques. Nous disposons d'une charge ponctuelle q que nous déplaçons à volonté. En chaque point, la charge q est soumise à une force \vec{F} , résultante des attractions et des répulsions de la répartition de charges donnée. La force \vec{F} dépend du point M où nous plaçons la charge q ; c'est une fonction des coordonnées, x, y, z de M . On dit que l'on est en présence d'**un champ de force**. Le vecteur qui représente la force n'a pas de signification physique indépendamment du point M où se situe la charge q sur laquelle s'exerce cette force. C'est donc l'ensemble $\{\vec{F}, M\}$ qui a un sens physique. La force est représenté ici par **un vecteur lié**. Un champ de force est donc décrit par un ensemble de vecteurs liés.

8.5.1 Circulation d'un vecteur.

Considérons une courbe C le long de laquelle est défini un vecteur \vec{F} en chaque point. Soit s l'abscisse curviligne d'un point courant, M et \vec{u} le vecteur tangent unitaire à la courbe en ce point. Le vecteur \vec{F} dépend du point M considéré : \vec{F} est donc une fonction de s . Il en est de même de \vec{u} .

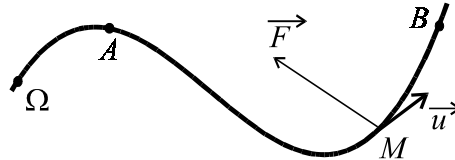


fig. 8.13

On pose $dW = \vec{F} \cdot \vec{u} ds$. **La circulation**, $W_{AB/C}$, du vecteur \vec{F} le long de la courbe C de A à B est l'intégrale de dW

$$W_{AB/C} = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot \vec{u} ds$$

Lorsque \vec{F} est une force dont le point d'application est M , la circulation est appelée **"travail"** de la force \vec{F} .

Si les vecteurs \vec{F} appartiennent à un champ de vecteurs, la circulation du champ de vecteurs entre A et B peut être calculée le long de divers chemins qui joignent A à B . On ne trouve pas toujours le même résultat : **la circulation d'un champ de vecteurs entre deux points dépend le plus souvent du chemin emprunté.**

Il y a cependant une exception importante que nous évoquons maintenant.

8.5.2 Gradient d'une fonction.

Considérons une fonction des coordonnées $V(x, y, z)$. Nous définissons le champ de vecteurs **"gradient de V "** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} [V] := \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

Exemple. $V(x, y, z) = 1/r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (c'est la coordonnée radiale de la représentation sphérique introduite à la section 8.1.2).

Le calcul donne $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} [r] &= \frac{x}{r} \vec{u}_x + \frac{y}{r} \vec{u}_y + \frac{z}{r} \vec{u}_z := \vec{u}_r \\ \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} \right] &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{u}_z \right) = -\frac{1}{r^2} \vec{u}_r \end{aligned}$$

où \vec{u}_r est le vecteur radial de la représentation sphérique (figure 8.3).

Cherchons la différentielle de V . On vérifie directement la relation

$$\boxed{dV := \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \overrightarrow{\text{grad}} [V] \cdot d\vec{OM}} \quad (8.4)$$

où $d\vec{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$.

Le long du chemin AB de la figure 8.13 il vient $d\vec{OM} = \vec{u} ds$. On en déduit la circulation du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} [V]$ le long du chemin AB :

$W = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} [V] \cdot \vec{u} ds = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} [V] \cdot d\vec{OM} = \int_A^B dV = V(B) - V(A)$. Par conséquent $W := \int_{s_A}^{s_B} \overrightarrow{\text{grad}} [V] \cdot \vec{u} ds$ ne dépend que de A et B et non du chemin intermédiaire :

$$\boxed{\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} [V] \cdot \vec{u} ds = V(B) - V(A)}$$

Exemple. Soit le champ de vecteurs $\vec{F} = ay \vec{u}_x + ax \vec{u}_y := F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y$.

Si \vec{F} est le gradient d'une fonction V , le lemme de Schwartz implique :

$F_x = \partial V / \partial x$ et $F_y = \partial V / \partial y \implies \partial F_x / \partial y = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \partial F_y / \partial x$. Cette condition est nécessaire ; il s'avère qu'elle est également suffisante.

Ici $\partial F_x / \partial y = a = \partial F_y / \partial x \implies$ le champ de vecteur est le gradient d'une fonction, $V(x, y, z)$. On dit que \vec{F} **dérive du potentiel** V .

Pour calculer, par exemple, la circulation entre les points $O(0,0)$ et $Q(\ell, \ell)$ on peut choisir un chemin particulier et calculer la circulation W le long de ce chemin car le résultat ne dépend pas du chemin choisi.

On peut aussi chercher le potentiel V .

Dans ce but on considère que y est une constante (arbitraire mais donnée). Le potentiel V est donc une fonction de x dont la dérivée est ay . On en déduit $\frac{\partial V}{\partial x} = ay \implies V = axy + C$. La constante d'intégration C est constante dans les conditions considérées, c'est à dire dans des conditions telles que seul x varie. C est donc éventuellement une fonction de y (mais non de x). On en déduit $V(x, y) = axy + C(y)$.

On considère maintenant que y seul varie et que x est maintenu constant. La relation $\frac{\partial V}{\partial y} = ax$ s'écrit $ax + \frac{dC}{dy} = ax$ soit $\frac{dC}{dy} = 0$. La quantité C , susceptible d'être une fonction de y seulement, est en fait une constante car sa dérivée (par rapport à y est nulle). On trouve donc $V = axy + cte$.

La circulation de \vec{F} entre O et Q vaut $V(Q) - V(O) = (axy)_Q - (axy)_O = a\ell^2$.

Remarque importante. Si une fonction V est constant, cela signifie que V n'est pas une fonction de x , c'est à dire $\partial V/\partial x = 0$ et de même $\partial V/\partial y = 0 = \partial V/\partial z$ d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} [V] = \vec{0} \iff V = cte$$

N.B. On trouve souvent l'écriture $\vec{\nabla} f$ pour $\overrightarrow{\text{grad}} [f]$ que nous avons utilisé ici.