

## Chapitre 4

### L'ESPACE DES ÉTATS DES SYSTÈMES COMPOSITES

#### 4.1 Système composé de deux sous-systèmes

Considérons un système composite formé de deux particules, un proton et un électron par exemple. Soit  $\mathcal{G}$  l'espace des états du proton et  $\mathcal{F}$  l'espace des états électroniques. Ces deux espaces ont été construits indépendamment l'un de l'autre en considérant les propriétés respectives du proton et de l'électron. L'espace des états du système composite est  $\mathcal{E}$ .

Une base de  $\mathcal{G}$  est  $\{|g_k\rangle\}$  tandis que  $\{|f_m\rangle\}$  est une base de  $\mathcal{F}$ . On considère l'ensemble des états du système composite où l'électron est dans l'état représenté par l'un des kets  $|f_m\rangle$  et le proton dans l'état représenté par l'un des kets  $|g_k\rangle$ . Ces états sont en nombre  $D_F \times D_G$  où  $D_F$  et  $D_G$  sont les dimensions de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . Ils sont représentés par un ket de  $\mathcal{E}$ , noté  $|g_k, f_m\rangle$ .

On admet que  $\{|g_k, f_m\rangle\}$  est une base de  $\mathcal{E}$ .

Ainsi la dimension de  $\mathcal{E}$  est  $D_{\mathcal{E}} = D_{\mathcal{F}} \cdot D_{\mathcal{G}}$ .

Le ket  $|g_k, f_m\rangle$  est noté  $|g_k\rangle \otimes |f_m\rangle$  où  $\otimes$  représente le *produit tensoriel* de  $|g_k\rangle$  par  $|f_m\rangle$ . L'ordre dans lequel apparaissent  $|g_k\rangle$  et  $|f_m\rangle$  est purement conventionnel. On aurait pu tout aussi bien écrire l'état sous la forme  $|f_m\rangle \otimes |g_k\rangle$ . Il convient de choisir un ordre une fois pour toutes et de n'en plus changer.

On écrit plus simplement  $|g_k, f_m\rangle = |g_k\rangle|f_m\rangle$  et son conjugué  $\langle g_k, f_m| = \langle f_m|\langle g_k|$ , afin de respecter les conventions de conjugaison.

##### 4.1.1 Produit tensoriel de deux espaces

On définit le produit tensoriel de deux vecteurs.

Soit  $|\gamma\rangle = \sum_k A_k |g_k\rangle \in \mathcal{G}$  et  $|\phi\rangle = \sum_j B_j |f_j\rangle \in \mathcal{F}$ . On définit

$$|\gamma\rangle \otimes |\phi\rangle := \sum_{k,j} A_k B_j |g_k, f_j\rangle \in \mathcal{E}$$

Le produit tensoriel ainsi défini présente les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} |\gamma\rangle \otimes (|\phi_1\rangle + \lambda|\phi_2\rangle) &= |\gamma\rangle|\phi_1\rangle + \lambda|\gamma\rangle|\phi_2\rangle \\ (|\gamma_1\rangle + \lambda|\gamma_2\rangle) \otimes |\phi\rangle &= |\gamma_1\rangle|\phi\rangle + \lambda|\gamma_2\rangle|\phi\rangle \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe arbitraire.

On vérifie aisément que la définition du produit tensoriel,  $|\gamma\rangle \otimes |\phi\rangle$  ne dépend pas des bases  $\{|g_k\rangle\}$  et  $\{|f_m\rangle\}$ , de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$ , choisies.

L'espace  $\mathcal{E}$  est appelé *produit tensoriel* de  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{E} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{F}$

##### 4.1.2 Produits scalaires d'états composites

Considérons des bases orthonormées  $\{|g_k\rangle\}$  et  $\{|f_m\rangle\}$  :

$$\langle g_k|g_{k'}\rangle = \delta_{k,k'} \text{ et } \langle f_m|f_{m'}\rangle = \delta_{m,m'}$$

On pose les relations d'orthonormalisations suivantes :

$$\langle g_k, f_m | g_{k'}, f_{m'} \rangle = \langle f_m | \langle g_k | | g_{k'} \rangle | f_{m'} \rangle = \delta_{k, k'} \delta_{m, m'}$$

Remarquons que les règles concernant le traitement des chaînes de caractères formées de nombres complexes, de bra et de kets sont encore respectées ici.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &:= \sum_{k,m} A_{k,m} |g_k, f_m\rangle \quad ; \quad |\Phi\rangle := \sum_{k,m} B_{k,m} |g_k, f_m\rangle \Rightarrow \\ \langle \Phi | \Psi \rangle &= \sum_{k,m} B_{k,m}^\dagger A_{k,m} \end{aligned}$$

## 4.2 Produit tensoriel d'un nombre quelconque d'espaces

### 4.2.1 Généralités

Les propriétés précédentes se généralisent au produit tensoriel d'un nombre quelconque d'espaces.

On considère  $n$  systèmes élémentaires dont l'espace des états de chacun d'eux est  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ . Par exemple, un électron  $e^-$ , un ion  $Na^+$ , un atome de chlore  $Cl$ ; ou encore, une particule scalaire et son spin  $1/2$ . Dans le premier exemple, le "grand système" est un système formé de trois particules tandis que dans le second exemple, il est formé d'une seule particule décrite par ses deux attributs (position et spin). Il n'est pas nécessaire de distinguer ici les deux cas. On peut considérer que le "grand système" est formé de  $n$  sous-systèmes : dans le premier exemple  $n = 3$ , tandis que  $n = 2$  dans le second exemple.

Le "grand système" admet pour espace des états le produit tensoriel,  $\mathcal{E}$ , des espaces élémentaires  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ .

On note  $\{|r_k\rangle\}$  une base de  $\mathcal{E}_k$ . Nous supposons que la base est discrète;  $r_k$  est un entier qui court de la valeur 1 à la valeur maximale  $D_k$ , dimension de  $\mathcal{E}_k$ . Une base de  $\mathcal{E}$  est obtenue en formant le produit tensoriel des vecteurs de base des espaces  $\mathcal{E}_k$  :

$$|r_1, r_2, \dots, r_n\rangle := |r_1\rangle \otimes |r_2\rangle \otimes \dots \otimes |r_k\rangle \otimes \dots \otimes |r_n\rangle := |r_1\rangle |r_2\rangle \dots |r_n\rangle$$

La décomposition de tout état sur la base ainsi obtenue s'écrit

$$|\Psi\rangle = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} C_{r_1, r_2, \dots, r_n} |r_1, r_2, \dots, r_n\rangle$$

Lorsque les bases  $\{|r_k\rangle\}$  sont orthonormalisées dans  $\mathcal{E}_k$  (i.e  $\langle r_k | r'_k \rangle = \delta_{r_k, r'_k}$ ) le produit scalaire dans  $\mathcal{E}$  est défini par les relations :

$$\langle r_1, r_2, \dots, r_n | r'_1, r'_2, \dots, r'_n \rangle = \delta_{r_1, r'_1} \delta_{r_2, r'_2} \dots \delta_{r_n, r'_n}$$

### 4.2.2 Opérateur linéaire agissant sur un état composite

Soit  $A_k$  un opérateur linéaire agissant dans  $\mathcal{E}_k$ . On définit l'opérateur  $A_k$  agissant dans  $\mathcal{E}$  comme un opérateur linéaire satisfaisant les relations

$$A_k(|r_1\rangle \otimes |r_2\rangle \otimes \dots \otimes |r_k\rangle \otimes \dots \otimes |r_n\rangle) = |r_1\rangle \otimes |r_2\rangle \otimes \dots \otimes (A_k |r_k\rangle) \otimes \dots \otimes |r_n\rangle$$

La relation précédente détermine l'action de  $A_k$  sur une base de  $\mathcal{E}$ . Elle détermine donc l'action de  $A_k$  sur tout vecteur de  $\mathcal{E}$ . Remarquons que l'on utilise la même notation,  $A_k$ , pour désigner deux opérateurs qui agissent dans les deux espaces différents  $\mathcal{E}_k$  et  $\mathcal{E}$ . Cette pratique est sans ambiguïté.

On vérifie les relations de commutation  $[A_k, B_m] = 0$  pour  $k \neq m$  : deux opérateurs agissant sur deux sous-espaces différents commutent.

On vérifie en outre que les définitions posées et les propriétés sont indépendantes des bases choisies.

### 4.3 Un exemple : la particule de spin 1/2

L'espace des positions  $\mathcal{E}_{\vec{r}}$  admet pour base  $\{|\vec{r}\rangle\}$ . L'espace du spin,  $\mathcal{E}_{1/2}$ , admet pour base  $\{|\pm\rangle\}$ . On considère la base de  $\mathcal{E} : \{|\vec{r}\rangle \otimes |\pm\rangle\}$ . Les vecteurs de base sont encore notés  $\{|\vec{r}, \pm\rangle\}$ .

L'état le plus général s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \int (\psi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle + \psi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle) d^3r \quad (4.1)$$

La fonction d'onde de la représentation considérée est l'ensemble des coefficients de la décomposition de l'état  $|\Psi\rangle$  sur la base choisie,  $\{|\vec{r}, \pm\rangle\}$ . La fonction d'onde se présente donc sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \psi_{(+)}(\vec{r}) \\ \psi_{(-)}(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Considérons un opérateur défini dans  $\mathcal{E}_{1/2}$  seulement,  $S_z$  par exemple. L'opérateur correspondant,  $S_z$ , agissant dans  $\mathcal{E}$  est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} S_z |\Psi\rangle &= \int (\psi_{(+)}(\vec{r}) S_z |\vec{r}, +\rangle + \psi_{(-)}(\vec{r}) S_z |\vec{r}, -\rangle) d^3r \text{ avec} \\ S_z |\vec{r}, \pm\rangle := |\vec{r}\rangle \otimes (S_z |\pm\rangle) &= \pm \frac{\hbar}{2} |\vec{r}\rangle \otimes |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\vec{r}, \pm\rangle \end{aligned}$$

L'effet de  $S_z$  peut être décrit sur la fonction d'onde matricielle. Dans la représentation utilisée, il vient

$$S_z \begin{pmatrix} \psi_{(+)}(\vec{r}) \\ \psi_{(-)}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{(+)}(\vec{r}) \\ \psi_{(-)}(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Ici, nous utilisons la même notation  $S_z$ , pour désigner l'opérateur qui agit dans  $\mathcal{E}_{1/2}$  et la matrice  $\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , représentation de l'opérateur  $S_z$  qui agit dans  $\mathcal{E}$ . De même, l'opérateur impulsion  $p_x$  qui agit dans  $\mathcal{E}_{\vec{r}}$  permet de définir l'opérateur impulsion qui agit dans  $\mathcal{E}$  ainsi que sa représentation :

$$\begin{aligned} p_x |\Psi\rangle &= \int \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle - i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle \right) d^3r \\ p_x \begin{pmatrix} \psi_{(+)}(\vec{r}) \\ \psi_{(-)}(\vec{r}) \end{pmatrix} &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi_{(+)}(\vec{r}) \\ \psi_{(-)}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\hbar \partial \psi_{(+)} / \partial x \\ -i\hbar \partial \psi_{(-)} / \partial x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons que  $p_x$  et  $S_z$ , considérés comme des opérateurs de  $\mathcal{E}$ , commutent entre eux car ils sont obtenus à partir des opérateurs initiaux  $p_x$  et  $S_z$  qui agissent dans des espaces différents.

Les relations d'orthonormalisation s'explicitent sous la forme :

$$\langle \vec{r}, \sigma | \vec{r}', \sigma' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta_{\sigma\sigma'} \text{ avec } \sigma, \sigma' = \pm$$

On détermine le produit scalaire de deux états dont on connaît la décomposition sur la base  $\{|\vec{r}, \sigma\rangle\}$ .

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int (\psi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle + \psi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle) d^3r \\ |\Phi\rangle &= \int (\varphi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle + \varphi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle) d^3r \end{aligned}$$

On trouve :

$$\langle \varphi | \Psi \rangle = \int (\varphi_{(+)}^\dagger \psi_{(+)} + \varphi_{(-)}^\dagger \psi_{(-)}) d^3r$$

Considérons un volume  $\delta V$  entourant le point  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Nous posons

$$\begin{aligned} |\Psi_{+}\rangle_{\delta V} &:= \int_{\delta V} \Psi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle d^3r \quad , \quad |\Psi_{-}\rangle_{\delta V} := \int_{\delta V} \psi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle d^3r \\ |\Psi'_{+}\rangle_{\delta V'} &:= \int_{\delta V'} \Psi_{(+)}(\vec{r}) |\vec{r}, +\rangle d^3r \quad , \quad |\Psi'_{-}\rangle_{\delta V'} := \int_{\delta V'} \psi_{(-)}(\vec{r}) |\vec{r}, -\rangle d^3r \end{aligned}$$

où  $\int_{\delta V'}$  représente une intégration sur le complémentaire,  $\delta V'$ , de  $\delta V$ .

Nous définissons l'observable  $A$  telle que  $A|\vec{r}, \sigma\rangle = |\vec{r}, \sigma\rangle$  si et seulement si  $\vec{r} \in \delta V$  et  $A|\vec{r}, \sigma\rangle = 0$  si et seulement si  $\vec{r} \notin \delta V$  (c'est à dire, ssi  $\vec{r} \in \delta V'$ ).

Nous écrivons  $|\Psi\rangle$  sous la forme :

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{+}\rangle_{\delta V} + |\Psi_{-}\rangle_{\delta V} + |\Psi'_{+}\rangle_{\delta V'} + |\Psi'_{-}\rangle_{\delta V'}$$

Cette expression est la décomposition du ket  $|\Psi\rangle$  en une somme de vecteurs propres de  $A$  et  $S_z$ . On vérifie que les observables  $A$  et  $S_z$  commutent. Les résultats d'une mesure de  $A$  sont  $a = 1$  (pour  $\vec{r} \in \delta V$ ) ou  $a = 0$  (pour  $\vec{r} \in \delta V'$ ).

Nous supposons que  $|\Psi\rangle$  est normalisé :

$$\langle \Psi | \Psi \rangle := \int \left( |\Psi_{(+)}(\vec{r})|^2 + |\Psi_{(-)}(\vec{r})|^2 \right) d^3r = 1$$

En utilisant les postulats de la mesure, pour un volume  $\delta V$  infinitésimal, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Proba de } (\vec{r} \in \delta V \text{ et } S_z = +\hbar/2) &= \left( |\Psi_{(+)}(\vec{r}_0)|^2 \right) \delta V \\ \text{Proba de } (\vec{r} \in \delta V \text{ et } S_z = -\hbar/2) &= \left( |\Psi_{(-)}(\vec{r}_0)|^2 \right) \delta V \\ \text{Proba de } (\vec{r} \in \delta V) &= \left( |\Psi_{(+)}(\vec{r}_0)|^2 + |\Psi_{(-)}(\vec{r}_0)|^2 \right) \delta V \\ \text{Proba de } (S_z = \pm\hbar/2) &= \int \psi_{\pm}^\dagger(\vec{r}) \psi_{\pm}(\vec{r}) d^3r \end{aligned}$$

## 4.4 Système composé de deux sous-systèmes indiscernables

### 4.4.1 Généralités

Considérons un système dont l'espace des états est  $F$ , de dimension trois pour fixer les idées. Une base de  $F$  est formée par les kets  $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ . L'espace des états d'un second système n'est pas noté  $G$  comme précédemment, mais  $\Phi$ . Ci-dessous, les grandeurs

symbolisées par une lettre grecque se rapportent à cet espace tandis que les grandeurs symbolisées par une lettre latine se rapportent à  $F$ .

Si la dimension de  $F$  est différente de celle de  $\Phi$  les systèmes ne sont certainement pas de même nature, il est donc possible de les distinguer.

Considérons le cas où  $F$  a même dimension que  $\Phi$ . Cela ne signifie pas que ces deux systèmes sont indiscernables. Chacun des système peut par exemple décrire deux atomes alcalins dont les états accessibles constituent deux espaces de même dimension, les deux alcalins ayant des masses différentes, ils seront cependant discernables.

Soit  $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$  une base de  $\Phi$ . Le système formé par les deux sous-systèmes admet pour espace des états l'espace  $\mathcal{E} = F \otimes \Phi$  dont une base est formée par les 9 vecteurs :

$$|a\rangle|\alpha\rangle, |a\rangle|\beta\rangle, |a\rangle|\gamma\rangle, |b\rangle|\alpha\rangle, |b\rangle|\beta\rangle, |b\rangle|\gamma\rangle, |c\rangle|\alpha\rangle, |c\rangle|\beta\rangle, |c\rangle|\gamma\rangle$$

En fait, nous aurions pu aussi bien choisir l'espace  $\Phi \otimes F$  pour représenter les états du système composite. En choisissant  $F \otimes \Phi$  nous décidons arbitrairement que le "premier" sous-système est un système de  $F$  tandis que le "second" est décrit dans  $\Phi$ . Ce choix étant fait, il est sans ambiguïté car les deux sous-systèmes sont discernables.

Nous considérons ici une situation différente où les deux sous-systèmes sont indiscernables (deux électrons ou deux atomes de césium 133 par exemple). Dans ce cas  $F = \Phi$ ,  $|a\rangle = |\alpha\rangle$ ,  $|b\rangle = |\beta\rangle$  et  $|c\rangle = |\gamma\rangle$ .

L'état le plus général s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= A|a\rangle|a\rangle + B|b\rangle|b\rangle + C|c\rangle|c\rangle \\ &\quad + A_s(|b\rangle|c\rangle + |c\rangle|b\rangle) + A_a(|b\rangle|c\rangle - |c\rangle|b\rangle) \\ &\quad + B_s(|a\rangle|c\rangle + |c\rangle|a\rangle) + B_a(|a\rangle|c\rangle - |c\rangle|a\rangle) \\ &\quad + C_s(|b\rangle|a\rangle + |a\rangle|b\rangle) + C_a(|b\rangle|a\rangle - |a\rangle|b\rangle) \end{aligned}$$

Si nous échangeons le premier et le second sous système, nous transformons le vecteur  $|\Psi\rangle \in F \otimes F$  en  $|\Psi\rangle_{ech} \in F \otimes F$  :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{ech} &= A|a\rangle|a\rangle + B|b\rangle|b\rangle + C|c\rangle|c\rangle \\ &\quad + A_s(|c\rangle|b\rangle + |b\rangle|c\rangle) + A_a(|c\rangle|b\rangle - |b\rangle|c\rangle) \\ &\quad + B_s(|c\rangle|a\rangle + |a\rangle|c\rangle) + B_a(|c\rangle|a\rangle - |a\rangle|c\rangle) \\ &\quad + C_s(|a\rangle|b\rangle + |b\rangle|a\rangle) + C_a(|a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle) \end{aligned}$$

Les deux sous-systèmes étant indiscernables,  $|\Psi\rangle_{ech}$  et  $|\Psi\rangle$  décrivent deux états identiques ce qui implique  $|\Psi\rangle_{ech} = \lambda|\Psi\rangle$ . Cette relation n'est généralement pas satisfaite sauf lorsque

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= A|a\rangle|a\rangle + B|b\rangle|b\rangle + C|c\rangle|c\rangle + A_s(|c\rangle|b\rangle + |b\rangle|c\rangle) \\ &\quad + B_s(|c\rangle|a\rangle + |a\rangle|c\rangle) + C_s(|a\rangle|b\rangle + |b\rangle|a\rangle) \end{aligned}$$

ou lorsque

$$|\Psi\rangle = A_a(|c\rangle|b\rangle - |b\rangle|c\rangle) + B_a(|c\rangle|a\rangle - |a\rangle|c\rangle) + C_a(|a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle)$$

Dans le premier cas  $|\Psi\rangle_{ech} = |\Psi\rangle$ . On constate que  $|\Psi\rangle$  appartient au sous-espace  $\mathcal{E}_s$  engendré par les six vecteurs de base symétriques :

$$|a\rangle|a\rangle, |b\rangle|b\rangle, |c\rangle|c\rangle, |c\rangle|b\rangle + |b\rangle|c\rangle, |c\rangle|a\rangle + |a\rangle|c\rangle, |a\rangle|b\rangle + |b\rangle|a\rangle$$

Dans le second cas  $|\Psi\rangle_{ech} = -|\Psi\rangle$ . L'état  $|\Psi\rangle$  appartient au sous-espace  $\mathcal{E}_a$  engendré par les trois vecteurs de base antisymétriques :

$$|c\rangle|b\rangle - |b\rangle|c\rangle, |c\rangle|a\rangle - |a\rangle|c\rangle, |a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle$$

On peut démontrer que les sous-espaces  $\mathcal{E}_s$  et  $\mathcal{E}_a$  ainsi obtenus sont indépendants du choix de la base de  $F$ .

#### 4.4.2 Bosons et fermions

Considérons le cas où les deux sous-systèmes sont deux particules identiques : deux atomes de césium par exemple. L'espace vectoriel  $F$  est donc l'espace des états d'un atome de césium. Dans chacun des cas possibles  $\mathcal{E}$  est l'un ou l'autre des deux espaces  $\mathcal{E}_a$  ou  $\mathcal{E}_s$  construit à partir de l'espace  $F$  correspondant. La nature ( $\mathcal{E}_a$  ou  $\mathcal{E}_s$ ) de  $\mathcal{E}$  dépend de la nature des particules considérées.

On appelle *fermions* les particules pour lesquelles  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_a$  et *bosons* celles pour lesquelles  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_s$ .

Soit  $|\Psi\rangle \in F$ . L'état  $|\Psi\rangle|\Psi\rangle \in \mathcal{E}_s$ . Il est donc possible de trouver plusieurs bosons (2 bosons ici) dans le même état quantique  $|\Psi\rangle$ .

A l'équilibre thermodynamique les bosons satisfont la statistique de Bose-Einstein (cf cours de Licence ou bibliographie).

A basse température, un gaz de bosons subit le phénomène de *condensation de Bose* : tous les bosons se retrouvent dans le même état, celui de plus basse énergie.

Les particules de spin entier sont des bosons.

$|\Psi\rangle|\Psi\rangle \notin \mathcal{E}_a$ . Il n'est donc pas possible de trouver deux fermions dans le même état quantique : c'est le *principe d'exclusion de Pauli*.

A l'équilibre thermodynamique les fermions satisfont la statistique de Fermi-Dirac (cf. cours de Licence ou bibliographie).

Les particules de spin demi-entier sont des fermions ; ainsi l'électron ( $s = 1/2$ ) est un fermion.

Dans une naine blanche les noyaux sont déshabillés. Une naine blanche est donc une étoile constituée de noyaux atomiques (de fer par exemple) qui baignent dans un gaz d'électrons. Les électrons ne subissent pas la condensation de Bose, car ce sont des fermions. A basse température, les électrons ne peuvent pas être tous dans l'état d'énergie minimale ; ils présentent donc un spectre d'impulsion qui s'étale de zéro à  $p_F$  : la pression correspondante empêche l'effondrement gravitationnel de l'étoile.

## 4.5 Particules composites “ponctuelles”

Considérons un atome. Cet atome possède une structure interne caractérisée par de multiples niveaux d'énergie, un moment cinétique propre (composition du moment orbital des électrons et du noyau par rapport à son centre de masse, du spin des électrons et du noyau), un moment magnétique, etc. Il peut en outre être ionisé de diverses manières, son noyau est susceptible de se désintégrer, spontanément s'il est radioactif ou sous l'effet de sollicitations extérieures.

A l'évidence, un atome est un système composite fort complexe.

Si l'atome n'est pas radioactif, s'il n'est pas soumis à des sollicitations extérieures trop violentes, il peut être souvent assimilé à une particule ponctuelle présentant une structure interne.

Sous l’effet d’une onde électromagnétique extérieure, l’atome pourra passer de l’état fondamental à un état excité par absorption d’un photon (parfois deux ou plus, mais c’est un processus rare). L’espace des états possibles est très riche (de dimension élevée), mais l’espace des états internes accessibles dans les conditions de l’expérience est beaucoup plus pauvre (sa dimension reste souvent de l’ordre de quelques unités).

Parfois l’atome conserve sa structure interne ; il reste, par exemple, dans l’état fondamental. Son moment cinétique propre est alors assimilé à un spin qui peut être entier ou demi-entier. C’est le cas dans l’expérience de Stern et Gerlach par exemple.

Dans ces conditions l’espace des états accessibles est le produit tensoriel de l’espace des positions de l’atome supposé ponctuel (assimilé à son centre de masse) par l’espace du spin de l’atome. Le formalisme est alors considérablement simplifié.

Si le spin de l’atome (considéré comme ponctuel) est nul, il peut être assimilé à une particule scalaire. Si le spin de l’atome est  $1/2$ , l’espace des états est similaire à l’espace des états d’un électron étudié ci-dessus. La fonction d’onde de l’atome est décrite par une matrice colonne de dimension 2 dont les composantes sont des fonctions de la position  $\vec{r}$ .

De façon générale, si le spin atomique est  $S$ , la fonction d’onde de l’atome est décrite par une matrice colonne de dimension  $2S + 1$ .

Lorsqu’on étudie l’atome à l’échelle atomique, il n’est pas considéré comme ponctuel. Son spin apparaît comme une combinaison des spins des particules qui le constituent (électrons et noyau) et de leurs moments cinétiques orbitaux par rapport au centre d’inertie de l’atome.

Lorsque l’atome est considéré comme ponctuel, son spin devient une caractéristique propre à l’atome, comme sa masse par exemple ; les interactions avec les ondes électromagnétiques sont cependant susceptibles d’en modifier la valeur.

Dans son mouvement rapporté à un repère galiléen, l’atome (supposé ponctuel) possède un moment cinétique orbital par rapport à l’origine du repère (moment cinétique de son centre de masse). Celui-ci doit être clairement distingué de son spin.

La nature bosonique ou fermionique d’une particule dépend de son spin, que cette particule soit “élémentaire” (l’électron par exemple) ou composite.

Les paires de Cooper (dans les supraconducteurs) ont pour spin 1 : ce sont des bosons ; elles sont cependant constituées de deux fermions (2 électrons).

Le noyau  ${}^4_2\text{He}$  a pour spin 0 : c’est un boson ; il est cependant constitué de fermions (deux neutrons et deux protons dont chacun a pour spin  $1/2$ ). Par contre le noyau  ${}^3_2\text{He}$  a pour spin  $1/2$  : c’est un fermion (NB : cet isotope est rare, en proportion de l’ordre de  $10^{-6}$  dans la nature).

Bien que ce soient des particules composites, la condensation de Bose peut se produire pour des atomes ; elle a été observée à la fin du XX<sup>ème</sup> siècle pour la première fois.

Il est possible de considérer des atomes comme des particules ponctuelles lorsqu’il existe un référentiel où leur dimension ( $a \simeq 3 \cdot 10^{-10}$  m) est très inférieure à la longueur d’onde de de Broglie de leur centre de masse,  $\lambda = h/mv$  (où  $m$  est la masse d’un atome et  $v$  sa vitesse). Dans un jet atomique, par rapport à un observateur qui accompagne le jet, la vitesse moyenne des atomes est minimale : elle est nulle. Cependant elle présente une dispersion d’origine thermique. La vitesse quadratique moyenne, à la température  $T$ , est de l’ordre de  $\bar{v} = \sqrt{kT/m}$ , où  $k$  est la constante de Boltzmann ; c’est l’ordre de grandeur de la vitesse acquise par tout atome, à un moment ou à un autre, lors des

collisions thermiques. On en déduit que les atomes peuvent être assimilés à des particules ponctuelles à spin pour  $T \ll 2\text{ K}$  (avec  $m \sim 100\text{ uma}$ ). Il a donc fallu apprendre à refroidir les atomes à très basse température avant d'observer le comportement indiqué.

Aujourd'hui, on peut refroidir les atomes à une température de l'ordre de  $10^{-6}\text{ K}$  en utilisant une *mélasse optique*. Le principe est le suivant. Soit  $\nu_0$  une fréquence de transition entre deux états internes d'énergies différentes. On illumine les atome au moyen d'un laser dont la fréquence  $\nu$  est très bien définie et un peu inférieure à  $\nu_0$ . Seuls les atomes qui viennent à la rencontre du faisceau lumineux voient une fréquence supérieure à  $\nu$ , et égale à  $\nu_0$  pour une vitesse convenable (effet Doppler :  $v \approx c(\nu_0 - \nu)/\nu_0$ ). Ces atomes-là absorbent un photon qui vient à leur rencontre, celui-ci possède une impulsion et la collision ralentit l'atome. Lorsque l'atome se désexcite, il le fait de façon isotrope et il ne regagne pas la vitesse perdue. Quant aux atomes qui n'ont pas la vitesse convenable, ils ne sont que peu affectés par les collisions élastiques avec les photons. Ainsi, le moyen mis en oeuvre permet de ralentir certains atomes et de refroidir la population toute entière. En élevant  $\nu$  progressivement jusqu'à la valeur  $\nu_0$ , on abaisse l'agitation thermique et par conséquent la température. D'autre mécanismes sont également mis en oeuvre ; ils permettent d'atteindre les températures les plus basses.

L'utilisation des atomes froids permet de réaliser des expériences d'interférométrie atomique semblables aux expériences d'interférométrie optique et ouvre des perspectives fascinantes pour l'avenir.

#### 4.6 Composition de deux moments cinétiques

(Consulter la bibliographie pour les démonstrations détaillées.)

Considérons un premier espace  $\mathcal{E}_1$  dont une base est  $\{|j_1, m_1, \tau_1\rangle\}$  et un second espace  $\mathcal{E}_2$  dont une base est  $\{|j_2, m_2, \tau_2\rangle\}$ . Ces bases sont les vecteurs propres des opérateurs  $\vec{J}_k^2$  et  $J_{kz}$  où  $\vec{J}_k$  est un moment cinétique agissant dans  $\mathcal{E}_k$  (avec  $k = 1$  ou  $2$ ) :  $\vec{J}_k \wedge \vec{J}_k = i\hbar\vec{J}_k$ . Considérons  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ . La base composée de  $\mathcal{E}$  est  $\{|j_1, m_1, \tau_1\rangle|j_2, m_2, \tau_2\rangle\}$  que l'on note également  $\{|j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle\}$ . Cette base est une base de vecteurs propres de l'ECOC  $\{\vec{J}_1^2, J_{1z}, \vec{J}_2^2, J_{2z}, T\}$  où l'on suppose, pour simplifier, les relations  $[T, \vec{J}_1] = [T, \vec{J}_2] = 0$ .

On définit alors les opérateurs  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  comme opérateurs agissant dans  $\mathcal{E}$  (cf le chapitre précédent). On vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 \wedge \vec{J}_1 &= i\hbar\vec{J}_1, & \vec{J}_2 \wedge \vec{J}_2 &= i\hbar\vec{J}_2, \\ [J_{1a}, J_{2b}] &= 0 \text{ avec } a, b = x, y \text{ ou } z \\ \vec{J} \wedge \vec{J} &= i\hbar\vec{J}, \text{ avec } \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  peuvent décrire deux atomes dont les moments cinétiques sont  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$ . La grandeur  $\vec{J}$  est alors le moment cinétique du système formé par l'ensemble des deux atomes. On peut également considérer que  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  décrivent deux attributs du même système ( $\mathcal{E}_1$  étant associé à l'état des variables orbitales tandis que  $\mathcal{E}_2$  décrit l'état du spin).  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  décrivent alors deux aspects complémentaires du moment cinétique (le moment cinétique orbital et le spin). En mécanique quantique, le même formalisme s'applique dans les deux cas.

Supposons que  $\mathcal{E}_1$  soit un espace propre de  $\vec{J}_1^2$  pour la valeur propre  $\hbar^2 j_1(j_1 + 1)$  tandis que  $\mathcal{E}_2$  est espace propre de  $\vec{J}_2^2$  pour la valeur propre  $\hbar^2 j_2(j_2 + 1)$ . Les nombres



$j_1$  et  $j_2$  étant fixés, nous pouvons ne pas les mentionner. Ainsi la base composée pourrait être notée  $\{|m_1, m_2, \tau\rangle\}$ . Nous maintiendrons cependant la notation  $\{|j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle\}$  :

$$\begin{aligned}\vec{J}_k^2 |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle &= \hbar^2 j_k(j_k + 1) |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle \\ J_{kz} |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle &= \hbar m_k |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle\end{aligned}$$

avec  $k = 1$  ou  $2$ .

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$  est un moment cinétique ( $\vec{J} \wedge \vec{J} = i\hbar\vec{J}$ ). On peut donc considérer la base standard de  $\mathcal{E}$ . Celle-ci est constituée de vecteurs propres de  $\vec{J}^2$  et  $J_z$ . On la note  $\{|j_1, j_2; j, m; \tau\rangle\}$  ou plus simplement  $\{|j, m; \tau\rangle\}$ , ce qui évite toute confusion avec la base composée :

$$\vec{J}^2 |j, m; \tau\rangle = \hbar^2 j(j + 1) |j, m; \tau\rangle, \quad J_z |j, m; \tau\rangle = \hbar m |j, m; \tau\rangle$$

En utilisant la relation de fermeture il vient

$$|j, m; \tau\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle$$

Les coefficients  $\langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan. On démontre la relation :

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle = 0 \text{ pour } m \neq m_1 + m_2$$

En effet,  $\langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | J_{1z} + J_{2z} | j, m; \tau\rangle - \langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | J_z | j, m; \tau\rangle = 0$ , car  $J_z := J_{1z} + J_{2z}$ .

Cette relation implique  $\hbar(m_1 + m_2 - m) \langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle = 0$  et, par conséquent :  $m \neq m_1 + m_2 \Rightarrow \langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle = 0$ .

On en déduit que la somme sur  $m_1$  et  $m_2$  est en fait restreinte aux valeurs de  $m_1$  et  $m_2$  telles que  $m = m_1 + m_2$  :

$$|j, m; \tau\rangle = \sum_{m_1 + m_2 = m} |j_1, j_2; m_1, m_2; \tau\rangle \langle j_1, j_2; m_1, m_2; \tau | j, m; \tau\rangle$$

Le tableau ci-après résume montre les conséquences de ces résultats.



Soit  $\mathcal{E}_m$  le sous-espace propre de  $J_z$  pour la valeur propre  $\hbar m$  et  $D_m$  la dimension de  $\mathcal{E}_m$ . Le tableau ci-contre (Fig. 1) représente les bases composées et standards des divers  $\mathcal{E}_m$  pour les différentes valeurs de  $m$ .

- La base standard doit avoir même dimension que la base composée. Ce qui implique  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ , où  $j$  varie par sauts d'une unité(\*).

- Pour obtenir la base standard, on pose  $|j_1 + j_2, j_1 + j_2; \tau\rangle = |j_1, j_2; j_1, j_2; \tau\rangle$ . On se déplace verticalement dans le tableau ci-contre, en appliquant  $J_- = J_{1-} + J_{2-}$  et en utilisant les relations de récurrence établies au chapitre 3. On engendre ainsi des vecteurs de base de  $\mathcal{E}_{m-1}$  à partir des vecteurs connus de  $\mathcal{E}_m$ .

- Dans le mouvement précédent, lorsqu'on passe de  $\mathcal{E}_m$  à  $\mathcal{E}_{m-1}$ , la dimension de l'espace augmente pour  $m < |j_1 - j_2|$ , plus précisément  $D_{m-1} = D_m + 1$  dans ce cas. On complète la base de  $\mathcal{E}_{m-1}$  en imposant que le dernier vecteur de la ligne soit normalisé et orthogonal aux vecteurs précédents de la même ligne.

---

\*Nous attirons l'attention sur cette propriété qui sera utilisée par la suite à diverses reprises.