

Deuxième partie

Eléments de mécanique

Chapitre 3

ELÉMENTS DE DYNAMIQUE

Ce chapitre aurait dû figurer dans le fascicule "*Introductions, rappels et compléments*". On peut en effet considérer qu'il est "hors programme" dans la mesure où il est constitué principalement de rappels de connaissances supposées déjà acquises par ailleurs. Si nous consacrons, ici, quelques pages à ces rappels, c'est en raison de l'importance des sujets traités dont il n'est pas possible de faire l'économie. Le test d'assimilation section 4.4 renvoie aux points les plus importants du présent chapitre.

En outre, nous attirons l'attention sur le chapitre 8 (*Les vecteurs*) de "*Introductions, rappels et compléments*". La section 8.4, tout particulièrement, est supposée connue.

3.1 Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel

3.1.1 Définitions.

L'espace est rapporté à un référentiel orthonormé direct, $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

La position d'un point M dans l'espace est repéré par ses coordonnées $\{x, y, z\}$ définis par la relation

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Lorsque les coordonnées de M sont des fonctions du temps, le point M est animé d'un mouvement. La courbe qu'il décrit dans l'espace est sa "**trajectoire**".

La **vitesse** de M par rapport à R est le vecteur $\vec{V}_{M/R}$ et son **accélération** le vecteur $\vec{\gamma}_{M/R}$.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M/R} &:= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \\ \vec{\gamma}_{M/R} &:= \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \end{aligned}$$

Les unités sont "le mètre par seconde" (m s^{-1}) pour les vitesses et "le mètre par seconde carré" (m s^{-2}) pour les accélérations.

Lorsque le repère $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est **fixe**, le vecteur $\vec{V}_{M/R}$ est la dérivée de \overrightarrow{OM}

par rapport au temps : $\vec{V}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. Ce n'est pas le cas si certains vecteurs de base, \vec{i} et \vec{j} , par exemple, dépendent du temps.

Parmi l'ensemble des référentiels possibles, il en existe une classe particulière, privilégiée parce que les lois de la dynamique y sont simples. Ces repères sont appelés "**repères galiléens**". C'est généralement un repère galiléen que l'on considère comme un repère fixe.

3.1.2 Composition des vitesses.

Considérons un repère fixe, R , et un second repère R' dont l'origine O' est en mouvement par rapport à R . Pour simplifier, supposons que les axes restent parallèles à ceux de R : $R' = \{O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Posons $\vec{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Les coordonnées de M par rapport à R' sont $\{x', y', z'\}$.

La vitesse de M par rapport à R' est $\vec{V}_{M/R'} := \frac{dx'}{dt}\vec{i} + \frac{dy'}{dt}\vec{j} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}$. Nous notons $\vec{V}_{R'/R}$, la vitesse de O' par rapport à R . En dérivant la relation $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ par rapport au temps on obtient $\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{O'/R} + \vec{V}_{M/R'}$ ce que l'on note sous la forme

$$\boxed{\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R'} + \vec{V}_{R'/R}}$$

Cette expression est la loi de composition des vitesses.

Exemple. Un observateur terrestre, R , regarde un avion, M , porté par un vent de vitesse $v_0\vec{i}$. Soit R' le référentiel emporté par le vent, $\vec{v}_{R'/R} = v_0\vec{i}$. Par rapport à l'air qui le porte, l'avion se déplace avec la vitesse $\vec{v}_{M/R'} = w\vec{u}$ (voir la figure ci-dessous).

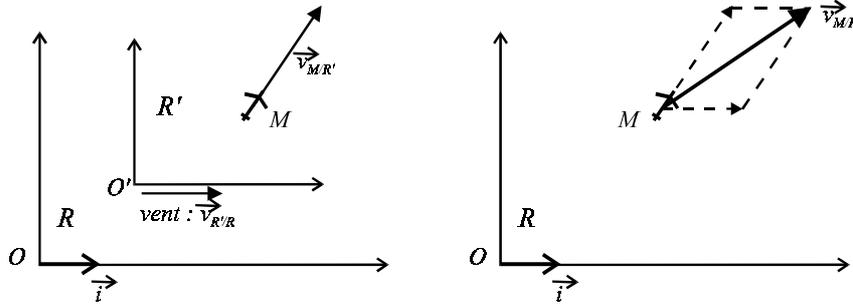


fig. 3.1 : Composition des vitesses.

Relativement à l'observateur terrestre la vitesse de l'avion est $\vec{v}_{M/R}$ telle que $\vec{v}_{M/R} = w\vec{u} + v_0\vec{i}$. L'avion semble se déplacer "en crabe". C'est très sensible par un vent de travers, avec de petits avions dont la vitesse n'est pas trop grande par rapport à celle du vent.

Lorsque $\vec{u} = \vec{i}$, le problème est un problème à une dimension. Dans ce cas on trouve $\vec{v}_{M/R} = v\vec{i}$ avec $v = v_0 + w$. Si les deux vitesses $\vec{v}_{R'/R}$ et $\vec{v}_{M/R'}$ sont de même sens, celui de \vec{i} par exemple, il vient $v_0 > 0$, $w > 0$ et $v = |w| + |v_0|$, les vitesses s'additionnent. Par contre, lorsque les vitesses sont de sens contraires, pour $v_0 < 0$ et $w > 0$ par exemple, on trouve $v = |w| - |v_0|$, les vitesses se soustraient.

Dans la suite du cours, nous utiliserons un repère galiléen, R , choisi une fois pour toutes. Nous considérons ce repère comme un repère fixe et nous abandonnons l'expression "par rapport à R " pour désigner la vitesse et l'accélération d'un mobile; de même nous écrivons \vec{v} et non plus \vec{v}/R .

3.1.3 Le principe fondamental de la dynamique.

Le **principe fondamental de la dynamique** postule l'existence de repères privilégiés, appelés "repères galiléens", où toute masse ponctuelle m , soumise à une force \vec{F} est animée d'une accélération $\vec{\gamma}$ telle que

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}} \quad (3.1)$$

Etant donné un repère galiléen R , cette propriété permet de démontrer que sont galiléens les repères dont l'origine est animée d'une vitesse constante par rapport à R et dont les axes restent parallèles à une direction fixe.

On déduit du principe fondamental qu'un point matériel immobile n'est soumis à aucune force et qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est animé d'une vitesse constante car $\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{cte}$.

3.2 Les systèmes de points matériels

3.2.1 Le centre d'inertie d'un système de points matériels.

Considérons maintenant un ensemble quelconque de points matériels, un solide ou un nuage. Les points sont notés M_k et leur masse m_k . On définit "**le centre de masse**", G , de ce système comme le barycentre des divers points matériels affectés de leur masse comme coefficient :

$$\boxed{\vec{OG} := \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{OM}_k} \quad \text{avec} \quad M := \sum_k m_k \quad (3.2)$$

M est la masse totale du système. Rappelons que la relation précédente implique

$$\boxed{\sum_k m_k \vec{GM}_k = \vec{0}}$$

Le centre de masse d'un système de points matériels est encore appelé "**centre d'inertie**". C'est en ce point que s'applique la résultante des forces de pesanteur lorsque le système est soumis à un champ de gravité uniforme ; pour cette raison G est parfois appelé "**centre de gravité**".

3.2.2 Forces intérieures et extérieures au système.

Etant donné un ensemble de points matériels, nous en isolons par la pensée un sous-ensemble, baptisé "système". Sur chaque point matériel s'exerce des forces. On distingue les "**forces intérieures**" et les "**forces extérieures**" au système.

Une force intérieure, $\vec{\varphi}_k$, est celle qu'exerce une partie du système lui-même, sur le point M_k . Considérons les points M_i et M_k du système, de masse m_i et m_k . La force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la masse m_i (avec $i \neq k$) sur la masse m_k est une force intérieure au système. De même l'attraction gravitationnelle qu'exerce m_k sur m_i est aussi une force intérieure au système. Si la masse m_k frotte sur la masse m_j , les forces de frottement de m_j sur m_k et de m_k sur m_j sont des forces intérieures au système.

La notion de force intérieure dépend crucialement de la définition donnée au système, or cette définition est toujours posée par le physicien ; elle constitue une façon de concevoir l'Univers. Il est donc très important de préciser quel est le système considéré (cf. fig. 3.2).

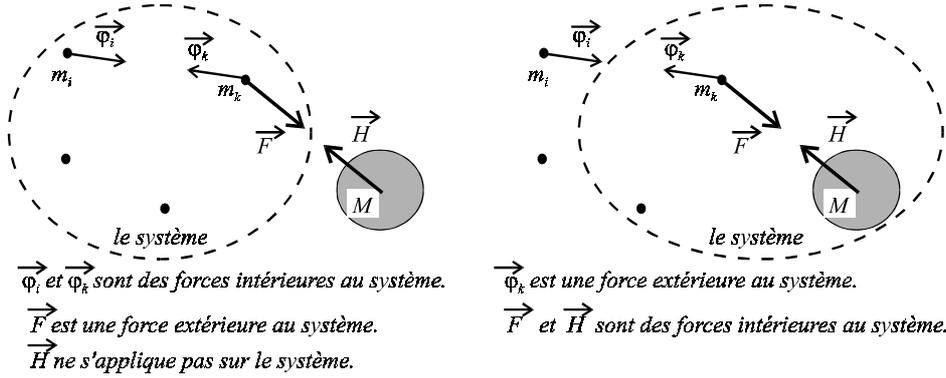


fig. 3.2 : Masses en attraction gravitationnelle.

Les forces qui s'appliquent sur des points matériels du système mais qui ne sont pas intérieures au système sont appelées "*forces extérieures*" au système.

Dans un souci de clarté, à partir de maintenant, nous notons $\vec{\varphi}_k$ la somme des forces intérieures qui s'exercent sur le point M_k du système et \vec{f}_k la somme des forces extérieures sur M_k .

La somme des forces intérieures au système est nulle; on peut le vérifier dans chaque cas particulier. Elevé au rang de principe cette propriété constitue "*le principe de l'action et de la réaction*".

$$\sum_j \vec{\varphi}_j = \vec{0} \quad (3.3)$$

Par exemple, dans le cas considéré ci-dessus (voir fig. 3.2 dans le premier cas), on vérifie que la loi de la gravitation de Newton conduit à la relation $\vec{\varphi}_i + \vec{\varphi}_k = \vec{0}$.

3.2.3 Mouvement du centre d'inertie.

Les propriétés précédentes conduisent à la relation

$$\boxed{\vec{F} = M \vec{\gamma}_G \text{ avec } \vec{F} := \sum_k \vec{f}_k} \quad (3.4)$$

où \vec{F} est **la somme des forces extérieures** qui agissent sur le système et $\vec{\gamma}_G$ l'accélération du centre d'inertie.

En effet, le principe fondamental appliqué à chaque masse m_j s'écrit $\vec{f}_j + \vec{\varphi}_j = m_j \vec{\gamma}_j$ où $\vec{\gamma}_j$ est l'accélération du point M_j de masse m_j , c'est à dire $\vec{\gamma}_j = d^2 \overrightarrow{OM}_j / dt^2$. En additionnant toutes les égalités précédentes, correspondant à chacune des masses du système, nous obtenons

$$\sum_j \vec{f}_j + \sum_j \vec{\varphi}_j = \sum_j m_j \vec{\gamma}_j := \frac{d^2}{dt^2} \sum_j m_j \overrightarrow{OM}_j$$

D'après 3.2 et 3.3 on obtient

$$\vec{F} := \sum_j \vec{f}_j = \frac{d^2}{dt^2} (M \overrightarrow{OG}) = M \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

Ces relations sont les relations 3.4.

3.2.4 *Quantité de mouvement.*

Soient m et \vec{v} la masse et la vitesse d'un point matériel. On définit la "**quantité de mouvement**" du point matériel comme le produit $\vec{p} := m\vec{v}$. Pour un système de points matériels la quantité de mouvement, \vec{P} , du système est par définition la somme des quantités de mouvement de chacun des points.

$$\boxed{\vec{p} := m\vec{v}, \quad \vec{P} := \sum_k m_k \vec{v}_k = M \vec{v}_G} \quad (3.5)$$

où \vec{v}_G est la vitesse du centre d'inertie du système et M sa masse.

En effet $\vec{P} := \sum_k m_k d\vec{OM}_k/dt = \frac{d}{dt} \sum_k m_k \vec{OM}_k$. En utilisant la définition du centre d'inertie on trouve $\vec{P} = \frac{d}{dt} (M \vec{OG})$, ce qui conduit à la dernière égalité de 3.5.

La relation 3.4 peut donc s'écrire sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \quad (3.6)$$

On en déduit que **la quantité de mouvement d'un système isolé**, ($\vec{F} = \vec{0}$), **est constante** (car sa dérivée par rapport au temps est nulle).

Application au moteur à réaction d'une fusée. Considérons une fusée dont la vitesse à l'instant t est $\vec{V}(t)$ et la masse M . Pendant la durée infinitésimale dt , la fusée éjecte une masse dm de gaz. La vitesse d'éjection par rapport à la fusée est \vec{w} . Par rapport à l'observateur galiléen fixe, la vitesse de la masse dm est $\vec{w} + \vec{V}$. La quantité de mouvement du gaz éjecté est donc $dm(\vec{w} + \vec{V})$.

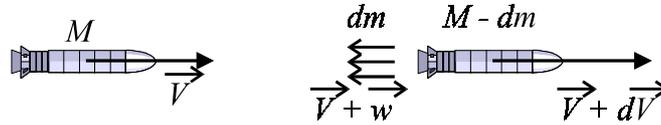


fig. 3.3 : Moteur à réaction.

Pendant le temps dt , la masse de la fusée a diminué de dm tandis que sa vitesse est devenue $\vec{V} + d\vec{V}$. Sa quantité de mouvement est passée de la valeur $M\vec{V}$ à la valeur $(M - dm)(\vec{V} + d\vec{V})$.

Le système formé par la matière contenue dans la fusée à l'instant t est un système isolé. Sa quantité de mouvement n'a donc pas varié. Elle était $M\vec{V}$ à l'instant t ; on en déduit $M\vec{V} = dm(\vec{w} + \vec{V}) + (M - dm)(\vec{V} + d\vec{V})$. En négligeant le terme du second ordre $dm d\vec{V}$, il vient $dm \vec{w} + M d\vec{V} = \vec{0}$ soit, en divisant les deux membres par dt ([†]),

$$\vec{\varphi} := M \frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \vec{w} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{dm}{dt} \quad (3.7)$$

où $\vec{\varphi}$ est la force qui s'exerce sur la fusée, due à l'éjection d'une masse μ de gaz par unité de temps à la vitesse \vec{w} par rapport à la fusée.

[†]Sans négliger les termes du second ordre, il vient $\vec{0} = \frac{dm}{dt} \vec{w} + M \frac{d\vec{V}}{dt} - dm \frac{d\vec{V}}{dt}$. A la limite $dt \rightarrow 0$ le dernier terme s'écrit $0 \times \vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de la fusée. On retrouve donc l'expression 3.7.

Lorsque \vec{V} et \vec{w} sont parallèles il vient $\vec{V} = V\vec{u}$ et $\vec{w} = w\vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire que nous choisissons de même sens que \vec{V} , ce qui implique $V > 0$. Si les gaz sont rejetés vers l'arrière, w est négatif : $w = -|w|$. La force de poussée est alors $\vec{\varphi} = \varphi\vec{u}$ avec $\varphi = -\mu w = \mu|w|$; sa mesure algébrique φ est positive; cela signifie que la force de poussée s'exerce vers l'avant : la fusée accélère.

3.3 Equilibre d'un solide

3.3.1 Absence de déplacement.

Considérons un solide en équilibre sous l'effet de plusieurs forces (extérieures). Le solide est au repos, ce qui implique que son centre d'inertie est immobile. De la relation 3.4 nous déduisons que **la somme des forces qui s'appliquent sur un solide immobile est nulle**.

Mais cette condition ne suffit pas car le solide pourrait tourner autour de son centre d'inertie G ; dans un tel cas G serait immobile mais non le solide.

3.3.2 Moment de forces.

Nous pouvons imaginer, passant par G , un axe fictif, Δ , orienté par le vecteur unitaire \vec{u} . Nous nous posons la question de savoir ce qui peut provoquer une rotation du solide autour de Δ et pourquoi cette rotation n'intervient pas. Remarquons que le solide étant au repos, on peut considérer un axe quelconque, ne passant pas nécessairement par G , et se poser les mêmes questions.

Considérons l'une des forces qui agit sur le solide : par exemple la force \vec{F}_k dont le point d'application est M_k .

Soit P_k le plan qui passe par M_k et est orthogonal à Δ . Ce plan coupe Δ en O_k . Soit \vec{n} le vecteur unitaire porté par O_kM_k et dirigé de O_k vers M_k . Les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux. Soit \vec{T} un vecteur unitaire orthogonal à \vec{u} et \vec{n} .

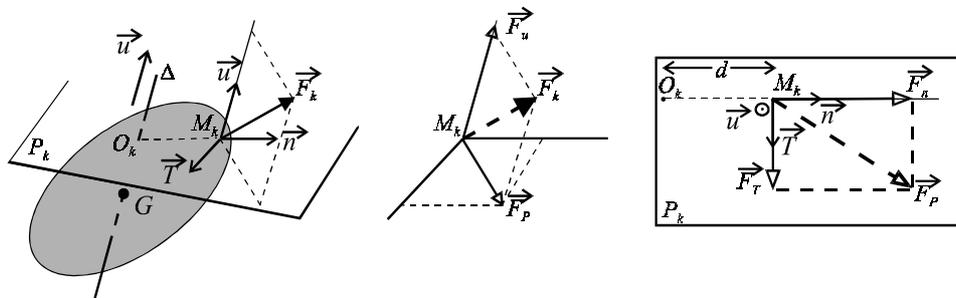


fig. 3.4 : Effet rotatoire d'une force.

La force \vec{F}_k est décomposée suivant les vecteurs \vec{u} , \vec{n} et \vec{T} :

$$\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_n + \vec{F}_T.$$

Les forces \vec{F}_u et \vec{F}_n ne produisent aucune rotation du solide autour de Δ ; par contre $\vec{F}_T := F_T \vec{T}$, si elle agissait seule, provoquerait la rotation du solide autour de Δ . Le vecteur \vec{u} étant choisi, il définit un sens positif de rotation donné par la règle de la main droite[†]. On définit "**le moment de \vec{F}_k par rapport à Δ** " comme le produit $\pm |F_T| d$ où d est la distance O_kM_k . Le signe "+" correspond à un effet de rotation dans

[†]voir le fascicule *Introduction, rappels et compléments*, paragraphe 8.1.1.

le sens positif. Dans le cas de la figure 3.4, ci-dessus, le moment de \vec{F}_k par rapport à Δ est $\mathcal{M}_{\vec{F}_k/\Delta} = -|F_T| d$. On peut vérifier la relation[†]

$$\mathcal{M}_{\vec{F}_k/\Delta} = \vec{u} \cdot \left(\overrightarrow{GM}_k \wedge \vec{F}_k \right) \quad (3.8)$$

cependant, *il est préférable de retenir la façon dont on calcule le moment d'une force plutôt que la formule précédente.*

L'unité de moment de force est le newton-mètre ($1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$). Le newton-mètre a même dimension que le joule, toutefois c'est une grandeur de nature différente.

Remarquons que **le moment d'une force dont la ligne d'action rencontre l'axe Δ est nul.**

Le moment, $\mathcal{M}_{/\Delta}$ d'un système de force par rapport à l'axe Δ est la somme des moments de chacune des forces par rapport à Δ :

$$\boxed{\mathcal{M}_{/\Delta} := \sum_k \mathcal{M}_{\vec{F}_k/\Delta}}$$

Ce sont les moments des forces qui sont la cause directe d'éventuelles rotations. Si le solide ne tourne pas, c'est que le moment total $\mathcal{M}_{/\Delta}$ est nul quel que soit l'axe Δ considéré.

3.3.3 Absence de rotation.

Le principe de l'action et de la réaction s'étend aux moments des forces intérieures à tout système matériel : **le moment des forces intérieures par rapport à tout axe Δ est nul.** On en déduit que **le solide ne tourne pas lorsque le moment des forces extérieures est nul par rapport à tout axe Δ .** Cette propriété permet de démontrer que les conditions d'équilibre d'un solide s'obtiennent selon la méthode suivante.

1. On écrit que \vec{F} , somme des forces extérieures, est nulle (absence de déplacement).
2. On choisit trois axes non coplanaires, arbitraires, ne passant pas nécessairement par G (les axes sont choisis de façon à simplifier les calculs).
3. Pour chacun des axes, on réalise une projection de la figure dans un plan perpendiculaire (projection des forces extérieures et de leur point d'application).
4. On calcule alors le moment de chaque force du système projeté et on écrit que le moment total est nulle.

On peut démontrer que les conditions précédentes assurent la nullité du moment des forces par rapport à n'importe quelle axe.

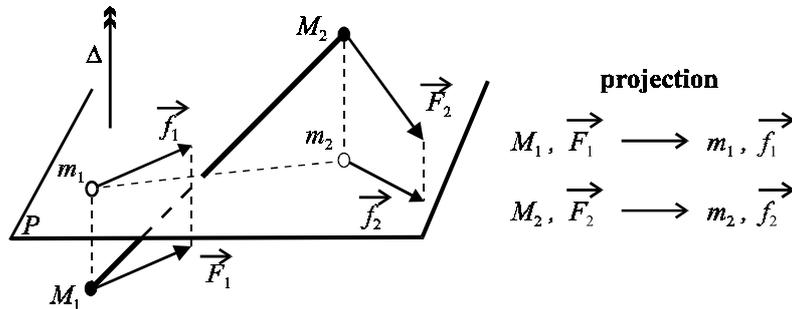


fig. 3.5 : Projection d'un système de forces.

[†]Pour la définition des opérations utilisées, se reporter au fascicule "Introduction, rappels et compléments", chapitre 8 (Les vecteurs).

Le système, S , considéré sur la figure 3.5, est formé des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 dont les points d'application sont M_1 et M_2 . On effectue une projection orthogonale du système sur un plan P orthogonal à l'axe Δ (vertical sur la figure). On obtient les forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 dont les points d'application sont m_1 et m_2 . Le moment des forces par rapport à Δ est le même pour le système S et pour le système projeté.

N.B. En général $\|\vec{f}\| \leq \|\vec{F}\|$. Si \vec{F} est parallèle à Δ (orthogonal à P), sa projection, \vec{f} , est nulle. Ici \vec{F}_1 est orthogonal à Δ (parallèle à P) ce qui implique $\vec{f}_1 = \vec{F}_1$.

On rencontre souvent le cas où toutes les forces sont parallèles à un même plan, P . Dans ce cas, pour exprimer l'absence de rotation, il suffit de considérer un seul axe, perpendiculaire à P . La projection sur P du système étudié est le système lui-même, dont on aurait gommé tout relief par rapport à Δ , axe de rotation orthogonal à P .

Application à l'équilibre du pied.

Un individu se tient sur le bout des orteils d'un seul pied. Les os de son pied constituent un solide représenté schématiquement en gris sur la figure ci-dessous. La force \vec{F}_1 est la tension qu'exerce le tendon d'Achille tandis que \vec{F}_2 est la poussée du tibia. La force \vec{F}_3 est la réaction du sol. En considérant l'équilibre de l'individu dans son ensemble on trouve $\vec{F}_3 + \vec{P} = \vec{0}$ où \vec{P} est le poids de l'individu.

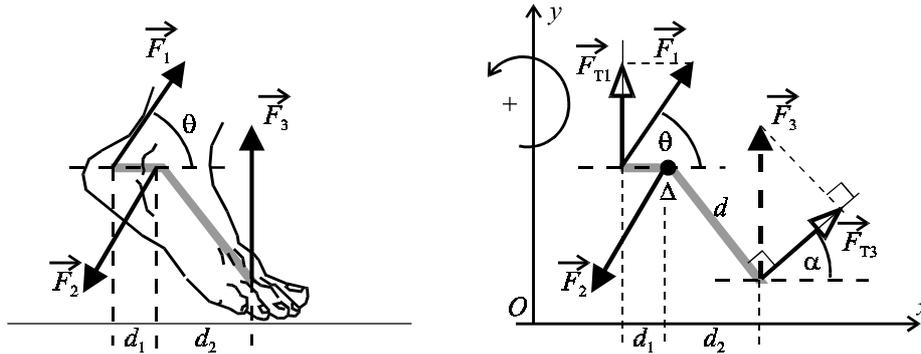


fig. 3.6 : Équilibre du pied.

Les projections des forces sur Ox et Oy sont données dans le tableau ci-dessous où F_1 , F_3 et P représentent les normes de \vec{F}_1 , \vec{F}_3 et \vec{P} tandis que les composantes de \vec{F}_2 sur Ox et Oy sont notées F_{x2} et F_{y2} .

Force	\vec{F}_1	\vec{F}_2	\vec{F}_3
Proj. sur Ox	$F_1 \cos \theta$	F_{x2}	0
Proj. sur Oy	$F_1 \sin \theta$	F_{y2}	$F_3 = P$

La première des conditions d'équilibre (absence de déplacement) s'écrit

$$F_1 \cos \theta + F_{x2} = 0 \quad \text{et} \quad F_1 \sin \theta + F_{y2} + P = 0 \quad (3.9)$$

Nous remarquons que toutes les forces et leurs points d'application appartiennent au même plan vertical xOy . Les seules rotations susceptibles de survenir sont les rotations autour d'un axe Δ orthogonal au plan xOy . Nous choisissons une orientation pour les angles (nous avons choisi le sens trigonométrique). Le choix de l'orientation des angles dans le plan détermine le sens de l'orientation de l'axe Δ , mais c'est sans importance ici.

La trace sur le plan xOy , de l'axe Δ que nous avons choisi est représenté sur la figure 3.6; c'est le point d'application de \vec{F}_2 .

Seules les composantes \vec{F}_{T1} et \vec{F}_{T3} des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_3 sont susceptibles de produire une rotation autour de Δ . Les moments des diverses forces par rapport à Δ sont

Force	\vec{F}_1	\vec{F}_2	\vec{F}_3
Moment / Δ	$-\ \vec{F}_{T1}\ \cdot d_1$	0	$\ \vec{F}_{T3}\ \cdot d = F_3 \sin \alpha \cdot d$

Les relations $\|\vec{F}_{T1}\| = F_1 \sin \theta$, $F_3 = P$ et $d \sin \alpha = d_2$ conduisent à la seconde condition d'équilibre sous la forme

$$-F_1 \sin \theta \cdot d_1 + P d_2 = 0 \quad (3.10)$$

Nous connaissons P , le poids de l'individu ainsi que d_1 , d_2 et θ qui caractérisent le pied dans la position d'équilibre. Les équations 3.9 et 3.10 nous donnent alors F_1 , F_{x2} et F_{y2} :

$$F_1 = \frac{d_2}{d_1 \sin \theta} P, \quad F_{x2} = -\frac{d_2 \cos \theta}{d_1 \sin \theta} P, \quad F_{y2} = -\frac{d_1 + d_2}{d_1} P$$

Par exemple, avec $P = 700 \text{ N}$, $d_1 = 3 \text{ cm}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$ et $\theta = 40^\circ$ il vient

$$F_1 \simeq 1800 \text{ N}, \quad F_{x2} \simeq -1400 \text{ N}, \quad F_{y2} \simeq -1900 \text{ N}$$

La norme de \vec{F}_2 est alors $F_2 = \sqrt{F_{x2}^2 + F_{y2}^2} \simeq 2300 \text{ N}$. Les forces qui agissent sur les os du pied peuvent donc dépasser le triple du poids de l'individu.

Nous aurions trouvé le même résultat en choisissant un axe, Δ , quelconque. Les calculs auraient été cependant plus compliqués du fait qu'il aurait fallu calculer le moment de \vec{F}_2 .

3.4 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir **un parallèle** entre les mouvements de translation d'un point matériel le long d'un axe Ox et les mouvements de rotation d'un solide autour d'un axe de rotation fixe, Δ .

Dans cette section, nous établissons ce parallèle mais nous ne le justifions que dans l'annexe qui suit.

Pour repérer la position angulaire du solide, nous choisissons un point fixe sur le solide, M . Lors de la rotation du solide, M décrit un cercle dans un plan perpendiculaire à Δ . Soit O le centre de ce cercle. On choisit un sens positif dans ce plan pour repérer les angles. Enfin, un axe fixe Ox orthogonal à Δ est choisi comme origine des abscisses angulaires.

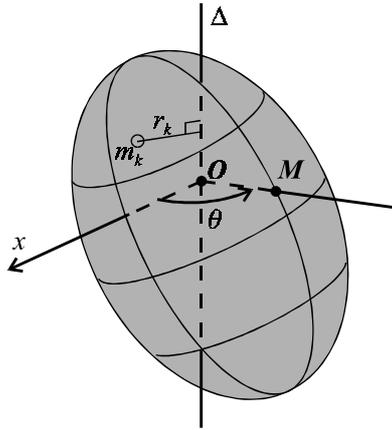


fig. 3.7 : Solide en rotation.

L'angle orienté θ de Ox à OM permet de repérer la position angulaire du solide. Lorsque le solide tourne, θ varie. L'abscisse angulaire θ est donc une fonction du temps : $\theta = \theta(t)$.

Considérons le point matériel de masse m_k , représenté sur la figure 3.7. Lors de la rotation, la trajectoire de ce point est un cercle centré sur Δ , dont le rayon est r_k . Nous aurions pu utiliser ce point à la place du point M . L'abscisse angulaire du solide, φ , aurait été différente de θ . Dans la rotation, φ et θ changent avec le temps mais la différence $\theta - \varphi$ reste constante. On en déduit la relation $d\theta/dt = d\varphi/dt$. Cette quantité est indépendante du choix de M (ou m_k); elle caractérise le mouvement du solide. C'est la "**vitesse angulaire du solide**"; elle s'exprime en radians par secondes (rad s^{-1}).

On définit également le "**moment d'inertie**" du solide par rapport à Δ . Celui-ci est noté $I_{/\Delta}$.

Considérons le solide comme un ensemble de points matériels, tels m_k . Le moment d'inertie $I_{/\Delta}$ est alors

$$I_{/\Delta} := \sum_k m_k r_k^2$$

l'unité de moment d'inertie est le "kilogramme mètre-carré" (kg m^2).

Le tableau 1, ci-dessous donne l'expression de $I_{/\Delta}$ dans deux cas simples ainsi que le théorème de Huygens. Ce théorème permet de calculer $I_{/\Delta}$ quand on connaît $I_{/D}$ (la droite D étant parallèle à Δ et passant par le centre d'inertie du solide, G) quand on connaît la distance d de D à Δ et la masse du solide, M .

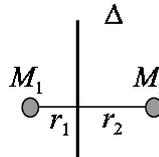
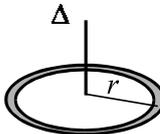
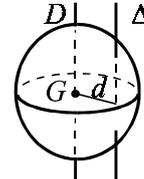
		
$I_{/\Delta} = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2$	$I_{/\Delta} = M r^2$	théorème de Huygens : $I_{/\Delta} = I_{/D} + M d^2$

tableau 1 : Moments d'inertie.

Le tableau 2, ci-dessous donne le moment d'inertie de trois solides homogènes de forme simple.

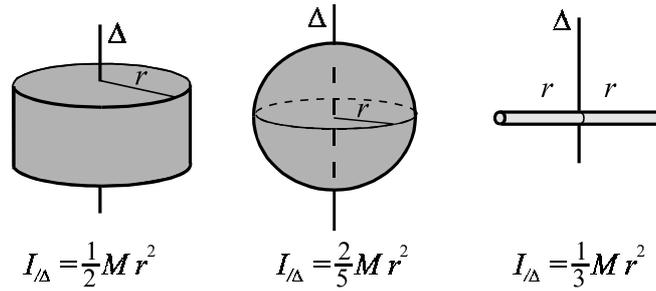


tableau 2 : Moment d'inertie de trois solides homogènes.

Pour établir le parallèle entre "translation" et "rotation", nous considérons un point matériel de masse m , susceptible de se mouvoir sur un axe Ox . L'abscisse de ce point est x , sa vitesse (algébrique) est $v = dx/dt$. Ce point est éventuellement soumis à une force \vec{F} dont la mesure algébrique sur Ox est notée F .

Le parallèle est donné dans le tableau ci-dessous.

Translation	\longleftrightarrow	Rotation
abscisse : x	\longleftrightarrow	θ : abscisse curviligne
masse : m	\longleftrightarrow	$I_{/\Delta}$: moment d'inertie
force : F	\longleftrightarrow	$\mathcal{M}_{/\Delta}$: moment des forces extérieures

On en déduit les correspondances suivantes où nous avons utilisé la notation $d(\cdot)/dt := \dot{(\cdot)}$.

Translation	\longleftrightarrow	Rotation
vitesse : $v := \dot{x}$	\longleftrightarrow	$\dot{\theta} := \Omega$: vitesse angulaire
accélération : $\gamma := \dot{v} := \ddot{x}$	\longleftrightarrow	$\ddot{\theta} := \dot{\Omega}$: accélération angulaire
quantité de mouvement : $p := mv$	\longleftrightarrow	$I_{/\Delta} \Omega := \sigma$: moment cinétique
loi fondamentale : $F = m \ddot{x} := \dot{p}$	\longleftrightarrow	$\dot{\sigma} := I_{/\Delta} \dot{\Omega} = \mathcal{M}_{/\Delta}$

Dans le tableau précédent nous avons supposé m et $I_{/\Delta}$ constants pour formuler la loi fondamentale de la dynamique. Cependant, il est possible de faire varier $I_{/\Delta}$ au cours du temps. Dans le cas général il vient

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 F &= \frac{dp}{dt} := \dot{p} \text{ avec } p := mv \text{ (cf. 3.6)} \\
 \mathcal{M}_{/\Delta} &= \frac{d\sigma}{dt} := \dot{\sigma} \text{ avec } \sigma := I_{/\Delta} \Omega
 \end{aligned}
 } \tag{3.11}$$

Nous avons introduit une grandeur nouvelle, "**le moment cinétique par rapport à Δ** " $I_{/\Delta} \Omega := \sigma$ (noté généralement en unité SI, homogène à $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$).

Un patineur artistique qui tourne sur lui-même peut être considéré comme un système isolé. Son poids est compensé par la réaction du sol tandis que le frottement des patins sur la glace peut être négligé. Dans ces conditions $\dot{\sigma} = 0$ et $\sigma = I_{/\Delta} \Omega$ est constant. L'axe Δ est l'axe vertical de son corps, autour duquel tourne le patineur. En étendant les bras ou une jambe, le patineur augmente son moment d'inertie; $I_{/\Delta}$ croît et par conséquent la vitesse de rotation du patineur sur lui même, Ω , diminue de telle

sorte que σ reste constant. Réciproquement en se recroquevillant sur lui-même le patineur diminue son moment d'inertie et sa vitesse angulaire augmente.

Remarquons que dans les tableaux précédents tout est matière de définition sauf la loi fondamentale appliquée aux corps en rotation dont nous donnons la démonstration en annexe.

Annexe (hors programme).

Etant donné un système de points matériels M_k et un point O , fixe, nous définissons $\vec{\sigma}_{/O}$, moment cinétique du système par rapport à O : $\vec{\sigma}_{/O} := \sum_k \overrightarrow{OM}_k \wedge m_k \vec{v}_k$ où m_k est la masse de M_k et \vec{v}_k sa vitesse.

O est un point quelconque de l'axe Δ et \vec{u} le vecteur unitaire qui oriente Δ . Nous posons $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{/O} := \sigma$. Cette relation définit σ , de façon indépendante de O .

En utilisant les propriétés des produits scalaires et vectoriels, il vient $\sigma = \sum m_k \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right) \cdot \vec{v}_k$.

Nous calculons $\dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{/O}$:

$$\dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \sum \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}_k \wedge m_k \vec{v}_k + \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge m_k \frac{d}{dt} \vec{v}_k = \sum \vec{v}_k \wedge m_k \vec{v}_k + \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge m_k \vec{\gamma}_k$$

Les relations $\vec{v}_k \wedge m_k \vec{v}_k = \vec{0}$ ainsi que le principe fondamental de la dynamique, $\vec{F}_k = \vec{f}_k + \vec{\varphi}_k = m_k \vec{\gamma}_k$, impliquent la relation $\dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge \vec{F}_k = \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge \vec{\varphi}_k + \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge \vec{f}_k$ où $\vec{\varphi}_k$ est la force intérieure qui s'applique sur M_k et \vec{f}_k la force extérieure.

La quantité $\vec{M}_{/O} := \sum \overrightarrow{OM}_k \wedge \vec{f}_k$ est appelée "moment des forces" \vec{f}_k par rapport à O , ou encore, ici, "moment des forces extérieures".

Le principe de l'action et de la réaction s'étend au moment des forces intérieures au système sous la forme $\sum \overrightarrow{OM}_k \wedge \vec{\varphi}_k = \vec{0}$. On obtient alors la relation $\dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \vec{M}_{/O}$, d'où on déduit $\vec{u} \cdot \dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \vec{u} \cdot \vec{M}_{/O}$.

La quantité $\mathcal{M}_{/\Delta} := \vec{u} \cdot \vec{M}_{/O}$ est précisément le moment des forces \vec{f}_k par rapport à l'axe Δ (cf. 3.8).

Lorsque l'axe Δ est fixe, le vecteur \vec{u} est constant : $\vec{u} \cdot \dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{/O})$ avec $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{/O} = \sigma$ et $\vec{u} \cdot \dot{\vec{\sigma}}_{/O} = \mathcal{M}_{/\Delta}$. Nous en déduisons la relation $\mathcal{M}_{/\Delta} = \dot{\sigma}$.

Il reste à démontrer la relation $\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_{/O} := \sigma := \sum m_k \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right) \cdot \vec{v}_k = I_{/\Delta} \Omega$. Dans ce but, nous considérons la figure 3.7.

Nous introduisons le vecteur "vitesse angulaire" $\vec{\Omega} := \Omega \vec{u}$. Le point M_k , de masse m_k , décrit un cercle de rayon r_k centré sur Δ , avec la vitesse angulaire Ω . On vérifie que son vecteur vitesse est $\vec{v}_k = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}_k = \Omega \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right)$. Le moment cinétique du solide par rapport à Δ est donc

$$\sigma := \sum m_k \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right) \cdot \vec{v}_k = \Omega \sum m_k \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right) \cdot \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right).$$

On vérifie directement la relation $\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}_k \right)^2 = r_k^2$. On en déduit $\sigma = \Omega \sum m_k r_k^2$.

Avec $I_{/\Delta} = \sum m_k r_k^2$ on trouve $\sigma = I_{/\Delta} \Omega$ et par conséquent $\mathcal{M}_{/\Delta} = \frac{d}{dt} (I_{/\Delta} \Omega)$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Chapitre 4 TRAVAIL ET ÉNERGIE

4.1 Travail, théorème de l'énergie cinétique

4.1.1 Travail, puissance.

Considérons une force \vec{F} , non nécessairement constante, dont le point d'application, M , décrit une courbe \mathcal{C} , entre A et B . Le long de \mathcal{C} les abscisses curvilignes, s , sont repérées à partir d'une origine Ω .

Dans un déplacement élémentaire de ds le long de cette courbe, le travail élémentaire de \vec{F} est, par définition, $dW := \vec{F} \cdot \vec{u} ds$ où \vec{u} est le vecteur unitaire tangent à \mathcal{C} , orienté dans le sens des s croissants. Le travail de \vec{F} entre A et B est l'intégrale du travail élémentaire.

$$dW := \vec{F} \cdot \vec{u} ds, \quad W_{A \rightarrow B} := \int_{s_A}^{s_B} \vec{F} \cdot \vec{u} ds$$

Les travaux s'expriment en joules ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$). Remarquons que le joule a même dimension physique que le newton-mètre (unité de moment de forces); ces deux unités se rapportent cependant à des grandeurs de natures différentes.

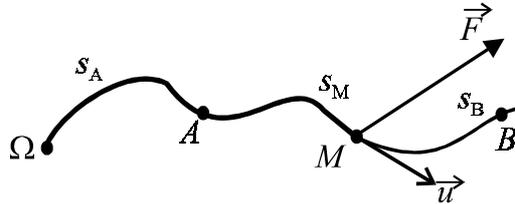


fig. 4.1 : Travail d'une force \vec{F} .

Lorsque le travail dW est positif, cela signifie que \vec{F} agit dans le sens du déplacement, la force est alors motrice et le travail dW est appelé "**travail moteur**". Lorsque dW est négatif il est appelé "**travail résistant**".

Remarquer que le travail total $W_{A \rightarrow B}$ peut être moteur ($W_{A \rightarrow B} > 0$) bien que sur certaines portions du trajet, le travail élémentaire puisse être résistant.

La position du point M dépend du temps. Soit $W(t)$ le travail de \vec{F} entre l'instant initial, quand M était en A , et l'instant t . On définit la puissance, P , de \vec{F} comme la dérivée $dW/dt = (\vec{F} \cdot \vec{u} ds) / dt$. La vitesse de M est $\vec{V} = (ds/dt) \vec{u}$. On obtient donc la puissance sous la forme

$$P := \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \tag{4.1}$$

où \vec{V} est la vitesse du point d'application de \vec{F} . Les puissances s'expriment en watts ($1 \text{ W} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$).

Pendant le temps dt , le travail élémentaire est

$$P dt = dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot \vec{u} ds.$$

Entre l'instant t_A , quand le point M était en A et l'instant t_B , quand le point M est en B , le travail de \vec{F} est

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} P(t) dt$$

Pour obtenir le travail, $W_{(1 \rightarrow 2)}$ d'un système de plusieurs forces entre deux instants, t_1 et t_2 , on détermine la puissance $P_k(t)$ de chacune des forces ; la puissance totale est alors $P(t) = \sum_k P_k(t)$. Le travail $W_{(1 \rightarrow 2)}$ est l'intégrale de $P(t)$ entre les deux instants t_1 et t_2 .

$$W_{(1 \rightarrow 2)} := \sum_k \int_{t_1}^{t_2} P_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k P_k(t) \right) dt := \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

4.1.2 Énergie cinétique d'un point matériel.

Un point matériel M de masse m , est soumis à la force \vec{F} . Sa vitesse est \vec{V} et son accélération est $\vec{\gamma} := d\vec{V}/dt$.

Le principe fondamental s'écrit $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. En multipliant (au sens du produit scalaire) les deux membres de cette équation par \vec{V} , on obtient

$$P := \vec{F} \cdot \vec{V} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{V}^2 \right).$$

À l'instant t_1 la vitesse de M est \vec{V}_1 , à l'instant t_2 , la vitesse de M est \vec{V}_2 . En intégrant l'expression précédente, on trouve

$$\int_{t_1}^{t_2} P dt := W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} m \vec{V}_2^2 - \frac{1}{2} m \vec{V}_1^2 \quad (4.2)$$

On définit l'énergie cinétique du point matériel de masse m et de vitesse \vec{V} comme la quantité E_c

$$E_c := \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m \|\vec{V}\|^2$$

La relation 4.2 s'écrit alors

$$\Delta E_c := E_{c2} - E_{c1} = W_{1 \rightarrow 2}$$

La variation d'énergie cinétique du point matériel, M , est égale au travail de la force qui agit sur M . Cette propriété est connue comme le "**théorème de l'énergie cinétique**" pour un point matériel.

L'énergie cinétique est de même nature que le travail, elle est de même dimension physique et s'exprime avec les mêmes unités (les joules).

4.1.3 *Energie cinétique d'un système de points matériels.*

L'énergie cinétique d'un système de points matériels est la somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

Si le système est un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ , l'énergie cinétique du solide en rotation se déduit du parallèle établi au chapitre précédent (page 33).

$m \rightarrow I_{/\Delta}$ (moment d'inertie par rapport à Δ) et $V \rightarrow \Omega$ (vitesse angulaire) impliquent

$$E_c := \frac{1}{2} I_{/\Delta} \Omega^2 \quad (4.3)$$

Nous démontrons cette relation dans le cas particulier traité dans l'exemple suivant.

Exemple. Une haltère formée de deux masses ponctuelles m fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2r$, tourne autour d'un axe Δ , perpendiculaire à la tige en son milieu G . La vitesse angulaire de l'haltère est Ω .

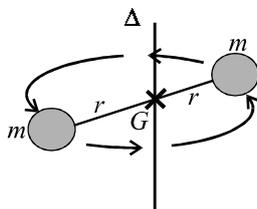


fig. 4.2

La vitesse de chaque masse est $V = r\Omega$. L'énergie cinétique du système est donc $E_c = 2 \times \frac{1}{2} mV^2 = mV^2 = mr^2\Omega^2$.

En utilisant la définition du moment d'inertie, on trouve $I_{/\Delta} = 2mr^2$. L'énergie cinétique s'écrit donc sous la forme 4.3 ci-dessus.

Si le solide, de masse M , est animé d'un mouvement, caractérisé par la vitesse \vec{V}_G de son centre d'inertie et qu'il est de plus soumis à une rotation de vitesse angulaire Ω autour d'un axe Δ de *direction fixe passant par son centre d'inertie* G , l'énergie cinétique du solide s'exprime sous la forme

$$E_c := \frac{1}{2} M \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} I_{/\Delta} \Omega^2 \quad (4.4)$$

Remarques : Lorsque Δ passe par G , la formule 4.3 ci-dessus se déduit de la relation précédente 4.4 dans le cas $\vec{V}_G = \vec{0}$. De même, si le solide n'est soumis à aucune rotation, tous les points du solide ont même vitesse, \vec{V}_G , la formule précédente devient

$$E_c := \frac{1}{2} M \vec{V}_G^2$$

4.1.4 *Théorème de l'énergie cinétique.*

Considérons un système de points matériels dans un certain état initial d'énergie cinétique E_{c1} . Sous l'effet de diverses forces, ce système évolue, il passe dans l'état final d'énergie cinétique E_{c2} . Le théorème de l'énergie cinétique exprime que **la variation d'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale au travail de toutes les forces (intérieures et extérieures) qui agissent sur le système lors de son passage de l'état initial à l'état final.** Ce que l'on résume par la formule

$$\Delta E_c := E_{c2} - E_{c1} = W_{int}(1 \rightarrow 2) + W_{ext}(1 \rightarrow 2) \quad (4.5)$$

Attention ! La somme des forces intérieures est nulle mais la somme de leurs travaux n'est pas nulle. Cette distinction explique pourquoi les forces intérieures n'interviennent pas dans la détermination du mouvement du centre d'inertie (formule 3.4) mais qu'elles interviennent dans le théorème de l'énergie cinétique 4.5.

Remarque. **Dans un corps indéformable, le travail des forces intérieures est nul.**

Le théorème de l'énergie cinétique est démontré en annexe. Ici, nous l'illustrons par l'exemple qui suit.

Exemple. Un cylindre plein, de masse M , homogène, lâché sans vitesse initiale, roule sur un plan incliné. Nous nous proposons de déterminer la vitesse de son centre d'inertie, G , et sa vitesse de rotation après qu'il soit descendu de la hauteur h .

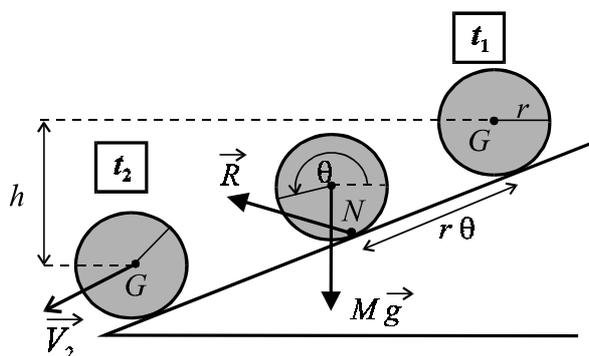


fig. 4.3

Le cylindre étant supposé indéformable, les forces intérieures au cylindre ne travaillent pas. Les forces extérieures qui agissent sur le cylindre sont son poids $M\vec{g}$ et la réaction, \vec{R} , du plan sur la génératrice N du cylindre au contact avec le plan. Le cylindre roule sans glisser, cela signifie que la vitesse des points du cylindre en contact avec le plan est nulle. Ces points changent tout le temps, N n'est jamais la même génératrice, mais la vitesse de N est nulle à chaque instant. La relation 4.1 implique donc que la puissance de \vec{R} est nulle. Le seul travail est celui du poids : $W(1 \rightarrow 2) = Mgh$ où $g = \|\vec{g}\|$ est l'accélération de la pesanteur.

L'absence de glissement implique en outre la relation $V = r\Omega$ où V est la vitesse de G tandis que Ω est la vitesse angulaire du cylindre dans son mouvement de rotation autour de G . Le rayon du cylindre est r .

L'énergie cinétique du cylindre est donné par la relation 4.4 où $I_{\Delta} = (1/2)Mr^2$. Il vient $E_c = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}Mr^2\Omega^2 = MV^2$. Dans l'état initial ($t = t_1$) la vitesse du cylindre est nulle ; dans l'état final elle vaut V_2 . Le théorème de l'énergie cinétique, 4.5, s'exprime sous la forme $W(1 \rightarrow 2) = Mgh = MV_2^2 - 0$. Soit $V_2 = \sqrt{gh}$ et $\Omega_2 = \sqrt{gh}/r$.

Remarquons qu'une masse M qui glisse sans frottement avec la vitesse V' , présente une énergie cinétique $\frac{1}{2}MV'^2$, ce qui conduit à $V'_2 = \sqrt{2gh} > V_2$.

4.2 Energie potentielle

4.2.1 Définition et exemples.

Considérons un système qui évolue de l'état "1" à l'état "2". Il peut arriver que le travail de certaines forces intérieures au système ne dépende pas de la façon dont on passe de l'état "1" à l'état "2" mais seulement de la position relative des points matériels

qui constituent le système dans l'état initial et dans l'état final. On dit que de telles forces "*dérivent d'une énergie potentielle*"[†].

Exemple. Considérons un ressort de masse négligeable, de raideur K , dont l'extrémité O est fixe tandis que l'autre extrémité, M , peut se déplacer. Il est donc possible d'allonger ou de comprimer le ressort. Soit x_1 l'allongement du ressort à l'instant initial; en déplaçant M on modifie l'allongement du ressort qui devient alors x_2 dans l'état final.

On peut imaginer que l'on passe de l'état "1" à l'état "2" rapidement ou lentement, par une traction continue ou encore par une succession de tractions et de compressions désordonnées; la façon de procéder est sans importance pour la suite.

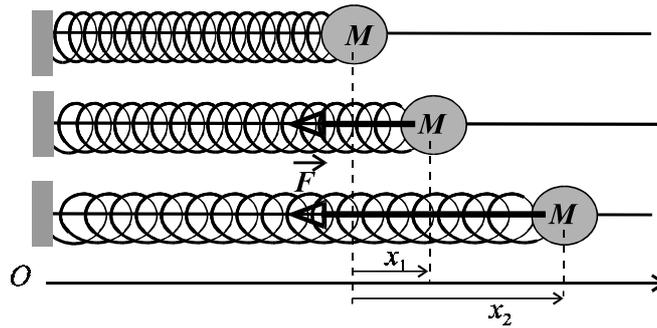


fig. 4.4 : Seul \vec{F} fournit un travail dans la déformation.

Le système considéré est formé du ressort OM et de la masse M . Le travail des forces qui s'appliquent en O est nul car le point O reste immobile. Sur chaque spire s'exercent deux forces opposées, \vec{F} et $-\vec{F}$ qui proviennent des tensions exercées par les parties du ressort situées à gauche et à droite de la spire considérée. Le travail total de ces deux forces est nul lorsque la spire se déplace. Par contre le point M est soumis à la force intérieure de tension du ressort, \vec{F} , et éventuellement à une force extérieure. Le travail des forces intérieures au système se réduit au seul travail de \vec{F} . Nous notons F la mesure algébrique de \vec{F} .

Lorsque l'allongement est x , la force F est $-Kx$ (c'est une propriété des ressorts!). Le travail élémentaire dans le déplacement dx est donc $dW = -Kx dx$. Lors du passage de l'état "1" à l'état "2", le travail des forces intérieures de tension est donc

$$W(1 \rightarrow 2) = \int_{x_1}^{x_2} -Kx dx = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \quad (4.6)$$

Le résultat est donc connu dès que l'on se donne l'état initial et l'état final, sans qu'il soit nécessaire de connaître les états intermédiaires.

Contre-exemple. La situation précédente est fréquente mais elle n'est pas générale. Considérons une force de frottement qui s'exerce sur un mobile M , en mouvement sur un plan. Le système considéré est l'ensemble formé par le plan et le mobile M . La force de frottement de M sur le plan s'applique successivement sur des points différents du plan qui cependant restent immobiles; son travail est donc nul. Par contre la force de frottement, F , qu'exerce le plan sur M s'applique sur un point qui se déplace; son travail n'est pas nul.

[†]Voir le fascicule "*Introductions, rappels et compléments*", la section 8.5 du chapitre 8 (*Les vecteurs*).

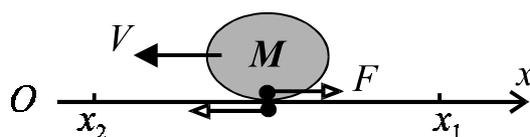


fig. 4.5 : Frottement sur un plan.

Sur la figure 4.5 nous représentons la vitesse de M et les forces en présence dont nous considérons seulement les mesures algébriques sur Ox (trace du plan sur la figure).

Supposons que le frottement soit visqueux. Dans ce cas $F := -\alpha V$ où α est une constante positive tandis que V est la vitesse de M .

La puissance de cette force est $P = FV = -\alpha V^2$.

Supposons que V soit une constante; entre l'instant t_1 et l'instant t_2 le travail de cette force est $W(1 \rightarrow 2) = -\alpha V^2 \cdot (t_2 - t_1)$. Le déplacement de M est $x_2 - x_1 = V \cdot (t_2 - t_1)$. On en déduit $W(1 \rightarrow 2) = -\alpha V (x_2 - x_1)$. Pour connaître $W(1 \rightarrow 2)$ il faut donc connaître V , c'est à dire la façon dont le système est passé de l'état initial à l'état final; la connaissance de x_1 et x_2 ne suffit pas. En règle générale, **les forces de frottement ne dérivent pas d'une énergie potentielle.**

Considérons des forces qui dérivent d'une énergie potentielle. On choisit un état de référence une fois pour toutes. On le note "0". Lors du passage de l'état "0" à un état quelconque, noté "f", le travail des forces considérées est $W(0 \rightarrow f)$. L'opposé de ce travail est appelé "**énergie potentielle**" du système dans l'état "f" et est notée $E_{pf} : E_{pf} := -W(0 \rightarrow f)$.

Le travail dans la transformation "0 \rightarrow f \rightarrow 0" ne dépend que de l'état initial et de l'état final. C'est donc aussi le travail enregistré lorsque le système est maintenu dans l'état "0". Il est donc nul. D'autre part ce travail est la somme des travaux effectués dans chacune des transformations "0 \rightarrow f" et "f \rightarrow 0". On en déduit

$$W(0 \rightarrow f) + W(f \rightarrow 0) = 0$$

Considérons maintenant le travail dans la transformation de l'état "1" à l'état "2". Le résultat étant indépendant de la façon de procéder, on peut imaginer que cette transformation s'effectue de la façon suivante : "1" \rightarrow "0" \rightarrow "2".

On trouve donc $W(1 \rightarrow 2) = W(1 \rightarrow 0) + W(0 \rightarrow 2)$, et d'après la relation précédente $W(1 \rightarrow 2) = W(0 \rightarrow 2) - W(0 \rightarrow 1)$. En utilisant la définition de l'énergie potentielle nous obtenons l'expression ci-dessous où nous avons ajouté l'indice "int" à W pour souligner qu'il s'agit du travail de forces intérieures au système.

$$\boxed{W_{int}(1 \rightarrow 2) = E_{p1} - E_{p2}} \quad (4.7)$$

Les remarques suivantes méritent attention.

1. L'unité d'énergie potentiel est celle d'un travail, c'est le joule.
2. Le travail des forces intérieures, $W_{int}(1 \rightarrow 2)$, est égale à la diminution d'énergie potentielle (l'opposé de la variation).
3. **L'énergie potentielle est définie à une constante additive près** qui dépend du choix de l'état de référence "0". Mais la diminution d'énergie potentielle entre deux états correspond à un travail bien défini dont la valeur est indépendante du choix de l'état de référence.
4. Les énergies potentielles associées à divers types de forces qui agissent sur le même système s'additionnent pour donner l'énergie potentielle totale.

4.2.2 L'énergie potentielle de pesanteur.

Considérons un système formé de deux masses, M et m , en attraction gravitationnelle. Les forces de gravitation sont des forces intérieures au système.

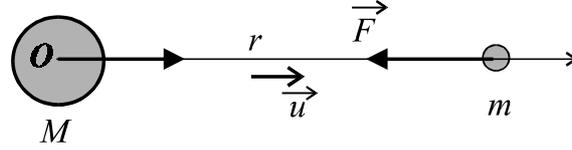


fig. 4.6 : Attraction gravitationnelle.

La masse M est maintenue immobile à l'origine, O . La force qui s'exerce sur M ne travaille donc pas. La masse m est soumise à la force $\vec{F} = F(r)\vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire représenté sur la figure 4.6, tandis que $F(r)$ est donné par la loi de Newton :

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2}$$

Considérons comme état de référence, l'état du système lorsque $r = \infty$ (état "0"). Dans l'état "1" la distance des masses est r_1 . Par définition l'énergie potentielle est $E_{p1} = -W_{\vec{F}}(0 \rightarrow 1) = -\int_{\infty}^{r_1} F(r) dr$ soit

$$E_{p1} := -\int_{\infty}^{r_1} -G \frac{Mm}{r^2} dr = -\left[G \frac{Mm}{r} \right]_{\infty}^{r_1} = -G \frac{Mm}{r_1}$$

Considérons le cas d'une masse m au voisinage de la Terre : $r_1 = R + z$ où R est le rayon terrestre et z l'altitude de m . On suppose $z \ll R$. On rappelle la relation $1/(1 + \varepsilon) \simeq 1 - \varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$. On trouve alors

$$E_{p1} = -G \frac{Mm}{R(1 + z/R)} \simeq -G \frac{Mm}{R} \left(1 - \frac{z}{R} \right) = -G \frac{Mm}{R} + G \frac{Mm}{R^2} z$$

Le choix de l'état de référence étant arbitraire, l'énergie potentielle est définie à une constante près ; nous pouvons donc poser $E_p := E_{p1} + GmM/R$ (la constante que nous ajoutons est GmM/R). Ce qui fournit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur sous la forme $E_p = mgz$ avec $g := GM/R^2$.

Que représente g ? Considérons la figure 4.6 avec $r \simeq R$, rayon de la sphère de centre O . La force qui agit sur m admet pour norme $|F| \simeq GMm/R^2$ et pour mesure algébrique $F \simeq -GMm/R^2$. Si la masse m n'est soumise à aucune autre force que la pesanteur, son accélération est $\gamma = F/m = -GM/R^2 := -g$ (\dagger). La constante g représente donc l'accélération des corps en chute libre au voisinage de la Terre : $g \simeq 9,8 \text{ m s}^{-2}$. L'expression de l'énergie potentielle obtenue est donc l'expression usuelle au voisinage de la Terre :

$$E_p = mgz$$

L'état de référence correspond à $E_p = 0$ soit $z = 0$ et $r = R$. mais l'énergie potentielle étant définie à une constante additive près, on peut choisir l'altitude $z = z_0$ comme état de référence, dans ce cas, l'énergie potentielle s'exprime sous la forme $E'_p = mg(z - z_0)$. Ce qui revient à ajouter la constante $-mgz_0$ à l'expression de E_p .

Remarquons que le fait de poser $r = R + z$ signifie que l'axe des z est orienté vers le haut (dans le sens de \vec{u} , conformément aux conventions de la fig. 4.6).

Par abus de langage, on écrit parfois "l'énergie potentielle de pesanteur de la masse m est mgz ". Cette expression donne à penser que le système considéré est la masse m et que l'énergie potentielle est associée à la force de pesanteur, extérieure au système. En réalité, l'énergie potentielle en question est l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre la Terre et la masse m , associée à une force intérieure au système "Terre + masse m ". La Terre n'est en fait, ici, présente que par son champ de pesanteur. On considère donc que le champ de pesanteur est inclus dans le système considéré. Dans ce contexte, il serait correct d'écrire (mais on le fait rarement) "l'énergie potentielle du système formé par la masse m et le champ de pesanteur terrestre est mgz ".

4.2.3 Divers exemples.

Bien que l'état de référence soit arbitraire, certains usages sont en pratique. Par exemple, pour exprimer l'énergie potentielle d'interaction entre deux particules, on convient de prendre pour état de référence l'état du système lorsque les particules sont infiniment éloignées les unes des autres. Pour des forces attractives (cas de la gravitation) les énergies potentielles sont alors négatives lorsque les corps sont à distances finies.

Dans certains cas, l'état de référence correspond au minimum de l'énergie potentielle. Par exemple pour le ressort on choisit l'état de référence tel que l'allongement est nul : $x = 0$. Les relations 4.6 et 4.7 fournissent alors l'expression $E_p = \frac{1}{2} K x^2$.

Nous donnons ci-dessous quelques expressions de l'énergie potentielle pour des systèmes que l'on rencontre fréquemment.

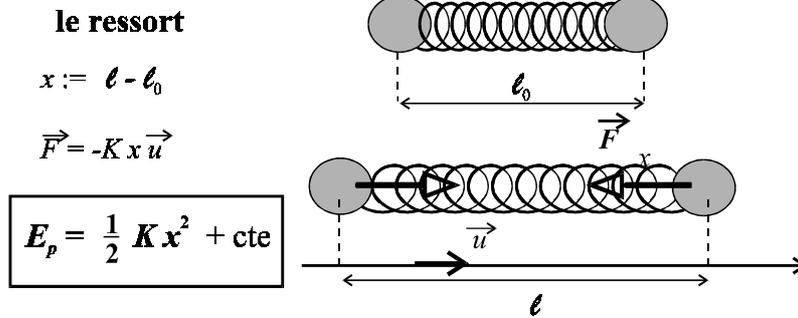


fig. 4.7 : Loi de force linéaire.

.....

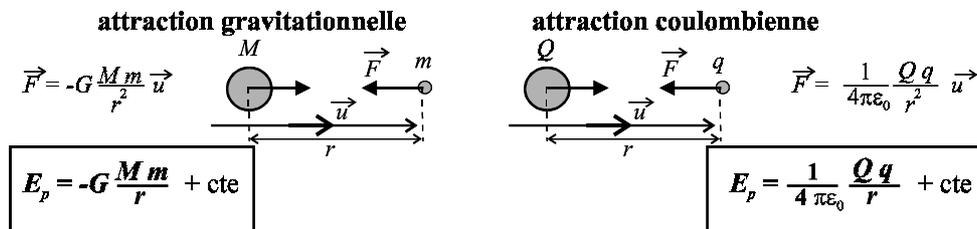


fig. 4.8 : Lois de force "en $1/r^2$ " (dessin pour $Qq < 0$).

.....

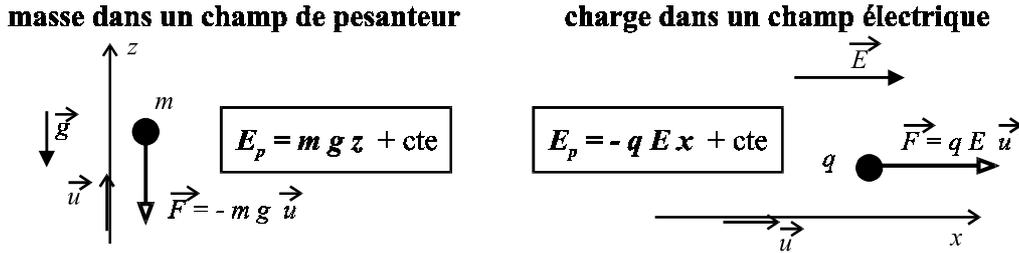


fig. 4.9 : Forces uniformes (indépendantes de la position).

4.3 Théorème de l'énergie mécanique

4.3.1 Le théorème de l'énergie mécanique.

Par définition, "l'énergie mécanique" d'un système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Elle est notée E_{Mf} dans l'état "f" : $E_{Mf} := E_{cf} + E_{pf}$

Considérons l'expression 4.5 du théorème de l'énergie cinétique. Le travail des forces intérieures, $W_{int}(1 \rightarrow 2)$ est la somme de deux termes :

- 1- le travail des forces qui dérivent d'une énergie potentielle,

$$W_{pot}(1 \rightarrow 2) := E_{p1} - E_{p2},$$

- 2- le travail des autres forces, W'_{int} .

La relation 4.5 s'écrit :

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + W'_{int}(1 \rightarrow 2) + W_{ext}(1 \rightarrow 2).$$

Cette relation se met sous la forme $(E_{c2} + E_{p2}) - (E_{c1} + E_{p1}) = W_{\emptyset}(1 \rightarrow 2)$ où $W_{\emptyset} := W'_{int} + W_{ext}$ est le travail des forces qui n'a pas été déjà compté dans le calcul des énergies potentielles. Exprimé sous cette forme, le théorème de l'énergie cinétique est connu comme "**théorème de l'énergie mécanique**".

$$\boxed{\Delta E_M := E_{M2} - E_{M1} = W_{\emptyset}(1 \rightarrow 2)}$$

La variation d'énergie mécanique d'un système est égale au travaux de toutes les forces, intérieures et extérieures, qui n'ont pas été pris en compte dans l'expression des énergies potentielles.

4.3.2 La conservation de l'énergie.

Nous pouvons considérer un système comme un récipient qui contient des joules, de même qu'un porte-monnaie contient des Euros. Les joules ont deux origines différentes : les joules d'énergie potentielle, les joules d'énergie cinétique, mais ce sont des joules. De même, dans le porte monnaie on peut y trouver des euro-francs et des euro-lires, mais ce sont des Euros. Le plus souvent nous ne cherchons pas à savoir combien il y a de joules dans notre récipient mais plutôt à établir des bilans en écrivant que l'accroissement du nombre de joules ($E_{M2} - E_{M1}$) est égal à ce que l'on y a mis ($W_{\emptyset}(1 \rightarrow 2)$).

Reprenons l'exemple traité ci-dessus (§ 4.1.4, page 38) du cylindre qui roule sur un plan incliné. Le système considéré maintenant, est formé du cylindre et du champ de pesanteur. La force de pesanteur dérive de l'énergie potentielle Mgz . L'énergie cinétique du cylindre est MV^2 . L'énergie mécanique du système est donc $Mgz + MV^2$. La variation d'énergie mécanique est $E_{M2} - E_{M1} = Mgz_2 + MV_2^2 - (Mgz_1 + 0)$ avec $z_2 - z_1 = -h$. Soit $\Delta E_M = -Mgh + MV_2^2$.

Quel est W_\emptyset ? C'est le travail de toutes les forces qui agissent sur le système sauf celles qui dérivent de l'énergie potentielle prise en compte. Pour déterminer W_\emptyset nous ne devons donc pas considérer la pesanteur. Les forces agissant sur le système, autres que la pesanteur, se réduisent à la seule force \vec{R} dont le travail est nul : $W_\emptyset = 0$.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc $-Mgh + MV^2 = 0$. C'est le résultat déjà obtenu ci-dessus.

L'utilisation du théorème de l'énergie mécanique ne permet pas l'économie de l'analyse détaillée nécessaire pour établir les relations $E_c = MV^2$ et $W_\emptyset = 0$. Le théorème de l'énergie mécanique fournit seulement une façon commode de se représenter l'évolution d'un système du point de vue énergétique.

L'énergie apparaît maintenant comme une quantité que l'on ne peut ni produire, ni détruire mais seulement transformer. Lorsque la pierre tombe, l'énergie potentielle devient énergie cinétique, quand l'énergie d'un système augmente, c'est parce qu'on lui apporte des joules (c'est le rôle de W_\emptyset) et non parce qu'ils auraient été produits à partir de rien. Cette propriété remarquable, très bien vérifiée expérimentalement, est connue comme le "**principe de conservation de l'énergie**".

Energie potentielle et énergie cinétique ne sont pas les seules formes d'énergie. Citons par exemple l'énergie rayonnante, celle des photons, ou encore l'énergie chimique stockée dans les piles ou dans les mélanges combustibles. **Le principe de conservation de l'énergie s'applique à toutes les formes d'énergie.** Cependant pour établir les bilans énergétiques on ne considère dans chaque cas que les énergies susceptibles de varier. Dans le problème du cylindre qui roule, il est par exemple inutile de considérer les énergies de liaison entre les atomes qui constituent le cylindre car celle-ci reste constante dans l'expérience considérée (le cylindre étant supposé indéformable).

4.3.3 Evolution spontanée et équilibres des systèmes mécaniques.

Considérons un système mécanique isolé, c'est à dire un système mécanique qui n'est soumis à aucune force extérieure. Nous admettons que les forces intérieures au système dérivent d'une énergie potentielle. C'est par exemple le cas du ressort de la figure 4.7, qui relie deux masses, M_1 et M_2 . Dans un tel cas, le centre d'inertie du système, s'il était initialement immobile, reste immobile même lorsque les masses oscillent (cf. equ. 3.4 ou 3.6). De plus, l'énergie mécanique du système est constante car W_\emptyset est nul.

Le système formé par le ressort et la masse M de la figure 4.4 n'est pas un système isolé car une force extérieure, \vec{R} , est nécessaire pour maintenir l'extrémité O immobile. Le centre d'inertie d'un tel système n'est donc pas nécessairement immobile, même s'il était initialement immobile. Par contre, la force \vec{R} ne travaille pas et, comme dans le cas précédent, W_\emptyset est nul. L'énergie mécanique du système est constante.

Les deux systèmes précédents, pour lesquels l'énergie mécanique ne varie pas au cours du temps, sont appelés "**systèmes conservatifs**".

Les systèmes macroscopiques parfaitement conservatifs n'existent pas dans la nature, même s'ils sont isolés. Il sont toujours soumis à des frottements qui transforment l'énergie mécanique en chaleur. La chaleur est une forme d'énergie, liée à l'agitation thermique. Le principe de conservation de l'énergie implique que la chaleur apparue par frottement est prélevée à l'énergie mécanique du système qui, par conséquent, décroît.

Soit E_{M2} et E_{M1} l'énergie mécanique du système aux instants t_2 et t_1 (avec $t_2 > t_1$). Sous l'effet des frottements il vient $E_{M2} < E_{M1}$. Le théorème de l'énergie mécanique implique $W_\emptyset = E_{M2} - E_{M1} < 0$ où W_\emptyset est le travail des forces de frottement. Ce travail est donc toujours un travail résistant ($W_\emptyset < 0$).

Considérons un système isolé, celui de la figure 4.10 par exemple, formé par le ressort et les deux masses susceptibles de glisser sur la tige AB .

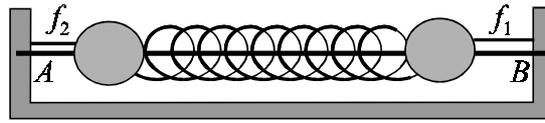


fig. 4.10

Le ressort est maintenu tendu par les fils f_1 et f_2 . A l'instant initial, t_1 , on coupe les fils. L'énergie cinétique du système, E_{c1} , est nulle mais sous l'effet de la tension du ressort, les masses se mettent en mouvement. A l'instant t_2 , voisin de t_1 , l'énergie cinétique est positive, car **compte tenu de sa définition, une énergie cinétique ne peut jamais être négative.**

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $E_{p2} + E_{c2} - E_{p1} = W_\theta$ où W_θ est ici le travail des forces de frottement. On en déduit alors la relation $E_{p2} = E_{p1} - E_{c2} + W_\theta$; les relations $E_{c2} > 0$ et $W_\theta < 0$ impliquent $E_{p2} < E_{p1}$.

Lorsque la rupture de certaines liaisons détruit l'équilibre d'un système mécanique, celui-ci évolue spontanément de telle sorte que son énergie potentielle diminue. Remarquons que cette propriété est également valable en l'absence de frottement ($W_\theta = 0$); cependant, sous l'effet des frottements, l'énergie mécanique du système décroît au cours du temps. Lorsque l'énergie potentielle ne peut pas diminuer, le système présente un état d'équilibre : abandonné dans cet état sans énergie cinétique, il ne peut pas évoluer et reste donc dans l'état où il se trouvait.

Considérons maintenant une masse m susceptible de glisser sans frottement sur un rail dont la forme est celle de la figure 4.11.

L'énergie potentielle du système formé par la masse m et le champ de pesanteur terrestre est mgz où z est une fonction connue de x , abscisse de la masse m . L'énergie potentielle, $E_p = mgz$, est donc une fonction connue de la variable x .

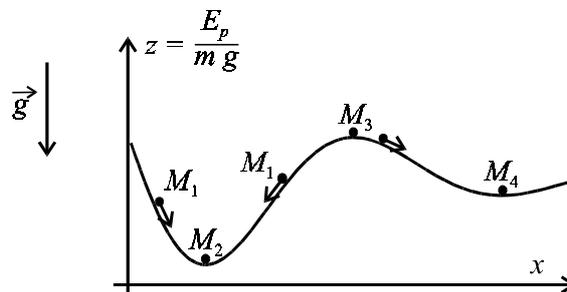


fig. 4.11

Lâché du point M_2 sans vitesse initiale, la masse m y reste immobile car aucun déplacement de m sur le rail ne permet de diminuer l'énergie potentielle. Le point M_2 est un point d'équilibre.

Lâchée sans vitesse initiale de l'un des points M_1 , voisins de M_2 , la masse m se dirige vers M_2 de telle sorte que l'énergie potentielle du système diminue, de façon similaire, si une petite perturbation éloigne m de ce point, les forces intérieures au système (celles qui dérivent de l'énergie potentielle, c'est à dire la pesanteur dans ce cas) ramènent m vers M_2 . Le point M_2 est un point d'équilibre stable. Remarquons que le point M_4 présente les mêmes caractéristiques vis à vis des petites perturbations.

De façon générale, **les configurations d'équilibre stable des systèmes mécaniques sont celles pour lesquelles l'énergie potentielle présente un minimum local.**

Lâchons la masse en M_3 sans vitesse initiale. Tout déplacement de m , vers la droite ou vers la gauche provoque une diminution d'énergie potentielle. Nous ne pouvons

pas, semble-t-il, prédire le sens du déplacement de m . En réalité, dans ce cas, lorsqu'on lâche la masse, l'équilibre n'est pas détruit. Cependant, si m est déplacé d'une quantité infinitésimale, m ne reviendra pas vers M_3 car c'est en s'en éloignant que l'énergie potentielle diminue. Le point M_3 est un point d'**équilibre instable**. C'est généralement le cas quand E_p est maximal.

N.B. Si un frottement immobilise m en M_1 , l'équilibre est dit "métastable".

4.4 Les vibrations d'une molécule diatomique (test d'assimilation)

4.4.1 Un modèle d'oscillateur harmonique.

Le modèle d'oscillateur harmonique considéré est formé d'une masse M susceptible d'osciller sur un axe Ox sous l'effet de la force de rappel, \vec{F} , qu'exerce un ressort sans masse dont une extrémité est fixe (cf. figure 4.4). Nous supposons que les frottements sont négligeables.

Le problème étant un problème à une dimension, nous considérons seulement les mesures algébriques des vecteurs suivant Ox .

L'allongement du ressort étant x , la force de rappel de l'oscillateur harmonique est $F = -Kx$ où K est une constante appelée "raideur du ressort". Nous utilisons la notation $(\dot{\quad})$ pour désigner la dérivée par rapport au temps.

L'équation du mouvement est : $M\ddot{x} = -Kx$ (si vous ne savez pas pourquoi, relisez le § 3.1.3).

La solution générale de cette équation différentielle est $x = a \sin(\omega t + \varphi_0) + x_0$ où a et φ_0 sont des constantes tandis que $\omega = \sqrt{K/M}$ (nous l'admettons, et **vous devez le savoir**. Vous pouvez cependant vérifier que l'expression de x satisfait l'équation du mouvement). Nous utiliserons par la suite l'expression $K = \omega^2 M$.

Sans perte de généralité, nous pouvons poser $x = a \sin \omega t$ avec $a > 0$ (si vous ne savez pas pourquoi relisez le § 8.4.5 du fascicule *Introduction, rappels, compléments*).

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} M a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$ (si vous ne savez pas pourquoi, relisez le § 4.1.2, utilisez les définitions du § 3.1.1 et revoyez le calcul des dérivées).

L'énergie potentielle est $E_p = \frac{1}{2} M a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$ (si vous ne savez pas pourquoi, relisez la section 4.2 en entier).

L'énergie mécanique est $E_M = \frac{1}{2} M a^2 \omega^2$ (si vous ne savez pas pourquoi, relisez la définition de l'énergie mécanique paragraphe § 4.3.1).

On constate que l'énergie mécanique est une constante ; cette propriété pouvait être affirmée sans calcul dès le début (si vous ne savez pas pourquoi, relisez le § 4.3.1).

L'énergie potentielle du système est $E_p = \frac{1}{2} M \omega^2 x^2$ (arrivé à ce stade vous devriez savoir pourquoi, sinon relisez la section 4.2 en entier, mais cette fois avec la volonté de l'assimiler !).

Le graphe de la fonction $x \mapsto E_p$ est représenté ci-dessous.

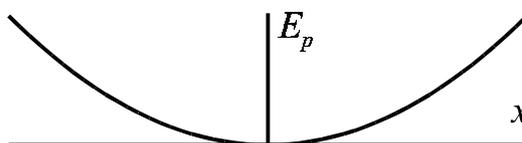


fig. 4.12 : $E_p = \frac{1}{2} M \omega^2 x^2$.

Cette courbe est une parabole (si vous ne savez pas tracer ou reconnaître une parabole dans le cas général, ou si vous n'en connaissez pas les propriétés, révisez vos cours de math du lycée). Son minimum se situe en $x = 0$. C'est une position d'équilibre stable (si vous ne savez pas pourquoi relisez le § 4.3.3).

4.4.2 Le ressort moléculaire.

Une molécule d'azote (N_2) est formée de deux atomes d'azote ${}^{14}_7N$. Nous considérons que la masse est concentrée dans les noyaux que nous assimilons à des points matériels dont la masse est environ $2,34 \cdot 10^{-26}$ kg; (si vous ne savez pas pourquoi, ni ce que signifient la notation " ${}^{14}_7N$ ", relisez la section 1.1). Nous considérons que la molécule constitue un système isolé.

La distance entre les noyaux est notée r . A l'équilibre, $r = r_0$.

L'énergie potentielle du système est donnée par l'expression empirique de Morse $E_p \simeq D(1 - \alpha e^{-r/a})^2$ avec

$$D = 7,4 \text{ eV} = 1,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}, \quad a = 0,30 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{et} \quad \alpha = 39,$$

(si vous ne comprenez pas pourquoi D est une énergie, a une longueur et α un nombre sans dimensions, relisez le chapitre 2).

Nous voulons déterminer r_0 ainsi que l'énergie, W , nécessaire pour casser la molécule en deux atomes d'azote (énergie de liaison). La molécule est en outre susceptible de vibrer comme un oscillateur. Pour $r \neq r_0$ les forces de liaison interatomique ramènent les atomes dans leurs positions d'équilibre, la distance interatomique oscille au voisinage de la valeur r_0 . Nous nous proposons également d'étudier cette vibration.

1. L'équilibre stable est obtenu lorsque l'énergie potentielle est minimum (si vous ne savez pas pourquoi, relisez la section 4.3). La valeur de r est alors r_0 . Calculons la dérivée dE_p/dr ; il vient $dE_p/dr = 2D \frac{\alpha}{a} e^{-r/a} (1 - \alpha e^{-r/a})$ (si vous ne savez pas calculer cette dérivée réviser les cours du lycée). r_0 est solution de l'équation $dE_p/dr = 0$ soit $1 - \alpha e^{-r_0/a} = 0 \Rightarrow r_0 = a \ln \alpha \simeq 1,1 \text{ \AA}$ (si vous ne savez pas faire ce calcul revoyez les propriétés des exponentielles et de logarithmes). Remarquer que dans cet état d'équilibre stable, l'énergie potentielle de la molécule est nulle. Cette *convention* pourrait cependant être modifiée (si vous ne comprenez pas la signification du mot "convention" dans le présent contexte, reportez vous à la définition de l'énergie potentielle page 40, au § 4.2.1, les remarques finales en particulier, et au § 4.2.3).

2. Lorsque le système est dans l'état $\{2N\}$ constitué de deux atomes d'azote éloignés suffisamment pour qu'aucune interaction ne se fasse sentir, on considère que $r = \infty$. L'énergie potentielle est alors D . En passant de l'état moléculaire stable $\{N_2\}$ à l'état $\{2N\}$, l'énergie potentielle subit la variation $\Delta E_p = D - D(1 - \alpha e^{-r_0/a})^2$. C'est précisément la valeur de l'énergie, W , qu'il faut dépenser pour casser la molécule (si vous ne comprenez pas pourquoi $W = \Delta E_p$, relisez les § 4.3.1 et 4.3.2 et décrivez avec précision l'état initial $\{N_2\}$ et l'état final $\{2N\}$). Compte tenu de l'équation satisfaite par r_0 , c'est à dire $1 - \alpha e^{-r_0/a} = 0$, on trouve $W = D = 7,4 \text{ eV}$.

3. Supposons maintenant que la molécule vibre. A l'instant initial son énergie mécanique est $E = 1 \text{ eV}$. Le système étant conservatif, la valeur maximale de son énergie potentielle est $E_p = E$ (si vous ne savez pas pourquoi, reportez vous à la section 4.3., en particulier au § 4.3.3 pour la définition du mot "conservatif"). Dans le cas où $E_p = E$, la distance inter atomique, r , est donnée par l'équation $E_p(r) = E$ soit $D(1 - \alpha e^{-r/a})^2 = E$ ou encore $(1 - \alpha e^{-r/a}) = \pm \sqrt{E/D} = \pm 0,37$. Les solutions sont r_1 et r_2 avec $e^{-r_1/a} = 1,37/\alpha$ et $e^{-r_2/a} = 0,63/\alpha$; ce qui donne $r_1/a = \ln(39/1,37) = 3,35$ et $r_2/a = \ln(39/0,63) = 4,13$ soit $r_1 \simeq 1,00 \text{ \AA}$ et $r_2 \simeq 1,24 \text{ \AA}$.

La distance interatomique oscille donc entre les valeurs r_1 et r_2 . L'énergie cinétique du système est maximale pour $r = r_0$, quand l'énergie potentielle est minimale.

Nous résumons les résultats obtenus, sur la figure, 4.13 ci-dessous où nous avons représenté le graphe de $E_p(r)$ (Il faut savoir étudier de telles fonctions et déterminer l'allure de leur graphe. Si vous ne savez pas, améliorez vos connaissances en math).

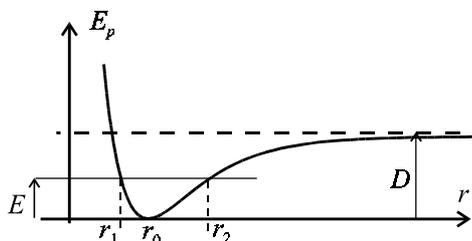


fig. 4.13 : Potentiel de Morse.

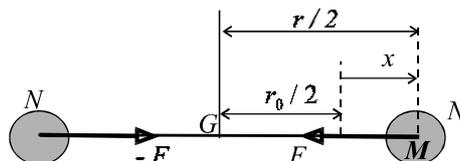


fig. 4.14 : Molécule d'azote.

4. Nous nous proposons de calculer la valeur de la force F en fonction de r .

Remarquons que les forces qui agissent sur chacun des atomes sont des forces opposées (si vous n'en connaissez pas la raison reportez vous au § 3.2.2). Donnons à r le petit accroissement dr en maintenant l'un des atomes immobile. Le travail des forces F et $-F$ est alors $dW = Fdr = -dE_p$, variation de l'énergie potentielle (En cas de difficulté, supposez que l'atome de gauche de la figure 4.14 est maintenu immobile, orientez l'axe des r de gauche à droite, remarquer que F est négatif ici et reportez vous au § 4.1.1. Si vous ne comprenez pas pourquoi $dW = -dE_p$, relisez attentivement le § 4.2.1). On en déduit la relation $F = -dE_p/dr$. Cette relation est générale dans les problèmes à une dimension. Il faut **retenir la méthode** employée pour obtenir F de préférence à la formule. On trouve $F = -dE_p/dr = -2D \frac{\alpha}{a} e^{-r/a} (1 - \alpha e^{-r/a})$.

Pour $r = r_1$ on trouve $F_1 = 4,0 \times 10^{-8}$ N et pour r_2 , on trouve $F_2 = -1,8 \times 10^{-8}$ N.

Remarquons que pour $r > r_0$, la fonction $E_p(r)$ est croissante, la force F est alors négative, elle a pour effet de diminuer r afin de le ramener à sa valeur d'équilibre r_0 . Pour $r < r_0$ la force est positive, elle a également pour effet de ramener r à sa position d'équilibre (l'équilibre est stable). La discussion précédente est une conséquence immédiate de l'existence d'un minimum de E_p pour la configuration d'équilibre $r = r_0$.

5. La distance r reste voisine de la valeur d'équilibre r_0 . On effectue un développement de Taylor de $E_p(r)$ du second ordre au voisinage de r_0 (cf. le fascicule *Introduction, rappels et compléments*, section 5.3) :

$$E_p(r) \simeq E_p(r_0) + \left(\frac{dE_p}{dr} \right)_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2E_p}{dr^2} \right)_{r_0} (r - r_0)^2$$

Compte tenu de la convention $E_p(r_0) = 0$ et de la condition $\left(\frac{dE_p}{dr} \right)_{r_0} = 0$, satisfaite parce que r_0 la valeur de r à l'équilibre, on obtient l'expression $E_p \simeq \frac{1}{2}K(r - r_0)^2$ avec $K = 2D \left(\frac{\alpha}{a} e^{-r_0/a} \right)^2$ soit $K = 2D/a = 2630 \text{ J m}^{-2}$.

Cette approximation consiste à remplacer le graphe de $E_p(r)$ par une parabole.

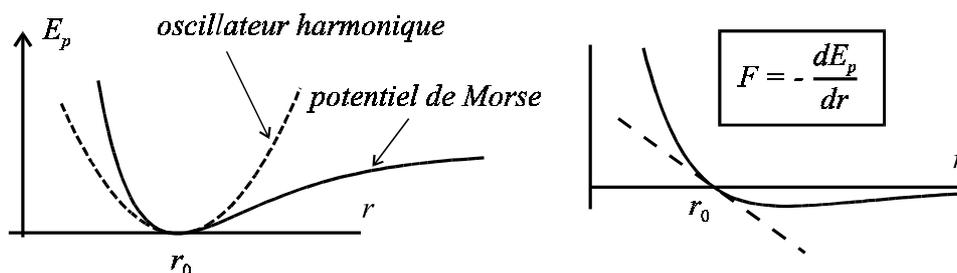


fig. 4.15 : Ajustement du potentiel de Morse à celui d'un oscillateur harmonique.

La relation $F = -dE_p/dr$ fournit l'approximation $F \simeq -K(r - r_0)$. On aurait obtenu le même résultat en développant l'expression $F = -2D \frac{\alpha}{a} e^{-r/a} (1 - \alpha e^{-r/a})$ au premier ordre au voisinage de $r = r_0$ (Si ces développements vous posent un problème, reportez vous à la section 5.3 du fascicule *Introduction, rappels et compléments.*).

Le centre d'inertie, G , du système (fig. 4. 14) se situe au milieu du segment qui joint les deux noyaux (en cas d'hésitation reportez vous au § 3.2.1). Le point G conserve une vitesse constante quelles que soient la vibration ou la rotation de la molécule (si vous ne savez pas pourquoi relisez les hypothèses du problème et le § 3.2.3). Nous rapportons l'étude du système au référentiel galiléen d'origine G . Dans ce référentiel, G est immobile (à l'origine!). Sans rien changer au problème, nous pouvons donc fixer G par la pensée, retirer le demi oscillateur de gauche de la figure 4.14 et considérer seulement le "demi oscillateur" GM où M est soumis à la force $F \simeq -K(r - r_0)$. En posant $x = (r - r_0) / 2$ il vient $F = -kx$ avec $k = 2K = 5260 \text{ N m}^{-1}$.

Nous reconnaissons le modèle d'oscillateur harmonique étudié au paragraphe précédent : la position d'équilibre correspond à $x = 0$ et la force de rappel est $F = -kx$. Le mouvement de vibration aura donc une pulsation $\omega = \sqrt{k/M}$ soit $\omega = 4,7 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, une fréquence $\nu = 7,5 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ et une période $T = 1,3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ (si vous ne savez pas pourquoi, retournez au début de la section 4.4 et , si nécessaire, consulter les définitions de T , ν et ω).

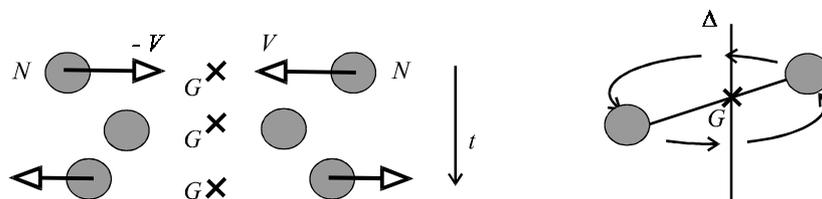


fig. 4.16 : Vibration et rotation d'une molécule d'azote.

6. Nous considérons maintenant la molécule d'azote comme un solide en rotation autour d'un axe Δ passant par son centre de masse, G et orthogonal à la droite qui joint les deux noyaux. Nous supposons que G reste immobile. Dans ce cas comme dans le cas précédent, les vitesses des deux atomes sont opposées (Si vous ne savez pas pourquoi G peut rester immobile et pourquoi les vitesses des atomes d'azote sont toujours opposées, reportez vous à la section 3.2, particulièrement aux § 3.2.3 et 3.2.4).

Les énergies en jeu à l'échelle atomique et moléculaire sont de l'ordre de l'électron-volt (par exemple l'énergie de liaison de N_2 est 7,4 eV). Cherchons la vitesse de rotation d'une molécule d'azote dont l'énergie cinétique correspondante serait 1 eV.

Soit I le moment d'inertie de la molécule par rapport à l'axe Δ : $I \simeq 1,4 \cdot 10^{-46} \text{ SI}$ (si vous ne savez pas pourquoi relisez la section 3.4). L'énergie cinétique de rotation est donnée : $\frac{1}{2} I \Omega^2 = 1 \text{ eV}$; on en déduit $\Omega \simeq 4,8 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$ ainsi que la période du mouvement $T = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Si la molécule possède une énergie cinétique de translation de 1 eV sa vitesse est alors $2,6 \text{ km s}^{-1}$ environ. (Si vous ne comprenez pas comment on été faits ces deux derniers calculs lisez le § 4.1.3.)

Annexe (hors programme).

Pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique, nous considérons un système formé de points matériels de masses m_k de vitesse \vec{v}_k .

L'énergie cinétique du système est $E_c = \sum_k \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k^2$.

En dérivant par rapport au temps il vient $\frac{dE_c}{dt} = \sum_k m_k \vec{v}_k \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{F}_k$ où

$\vec{F}_k = m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$ est la force qui agit sur la masse m_k (somme des forces intérieures et extérieures qui agissent sur m_k). La puissance des forces qui agissent sur m_k est $\vec{v}_k \cdot \vec{F}_k$. La quantité $\frac{dE_c}{dt}$ est donc la somme, P , des puissances de toutes les forces qui agissent sur le système. C'est la puissance des forces intérieures et extérieures qui agissent sur le système : $P = P_{int} + P_{ext}$.

Entre les instants t_1 et t_2 il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt = E_{c2} - E_{c1} = \int_{t_1}^{t_2} P_{int} dt + \int_{t_1}^{t_2} P_{ext} dt = W_{int}(1 \rightarrow 2) + W_{ext}(1 \rightarrow 2).$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Chapitre 5 LES COLLISIONS

L'espace étant rapporté à un référentiel galiléen, **l'impulsion et l'énergie d'un système isolé restent constantes au cours du temps**. Ces lois de conservation sont très bien vérifiées expérimentalement.

La loi de conservation de l'impulsion est une conséquence de la relation 3.6 où $\vec{F} = \vec{0}$ pour un système isolé.

La loi de conservation de l'énergie concerne toutes les formes d'énergie. Nous l'avons déjà évoquée ci-dessus paragraphe 4.3.2.

5.1 Généralités

Notre propos, ici, est de mettre en oeuvre ces lois de conservation dans deux cas particuliers très différents qui concernent les collisions d'une part et l'hydrodynamique des fluides parfaits d'autre part.

Lorsque des corps sont très éloignés les uns des autres, ils n'interagissent pas. Le système formé par ces corps présente l'impulsion $\vec{P} = \sum \vec{p}_k$ où la somme est étendue à toutes les impulsions \vec{p}_k des corps qui constituent le système.

Lorsque les corps se rapprochent, des interactions se produisent. Celles-ci peuvent être de natures très diverses. L'interaction peut être un choc entre deux boules de billard, ou une réaction chimique entre deux molécules.

Lors de l'interaction, d'anciens corps (ou d'anciennes particules) ont éventuellement disparu tandis que de nouveaux corps (ou de nouvelles particules) se sont formés le cas échéant. Après l'interaction, les corps (ou particules) qui constituent le système à ce moment là, s'éloignent à l'infini les uns des autres. On dit que cette interaction constitue "*une collision*".

Après la collision les particules ont une impulsion \vec{p}'_j ; l'impulsion du système est $\vec{P}' = \sum \vec{p}'_j$. La conservation de l'impulsion s'écrit

$$\boxed{\vec{P} := \sum \vec{p}_k = \sum \vec{p}'_j := \vec{P}'} \quad (5.1)$$

Si le système n'est pas isolé, la relation 3.6 s'écrit sous la forme

$$\vec{P}' - \vec{P} = \int_{t_0}^{t'_0} \vec{F}(t) dt$$

où \vec{P} est l'impulsion du système à l'instant t_0 , immédiatement avant la collision et \vec{P}' l'impulsion à l'instant t'_0 , immédiatement après. La force $\vec{F}(t)$ est la résultante des forces extérieures qui agissent à l'instant t sur le système. Soit F_M un majorant de $\|\vec{F}(t)\|$ pour $t \in [t_0, t'_0]$. Si la collision est assez brève pour que $(t'_0 - t_0) F_M$ soit négligeable, la relation $\vec{P}' = \vec{P}$ reste encore vérifiée.

Nous retiendrons la validité de la relation 5.1 pour les systèmes isolés et les collisions brèves.

La conservation de l'énergie, pour un système isolé, s'écrit de même sous la forme

$$\boxed{E = E'}$$

où E et E' sont les énergies du système avant et après la collision.

Si le système n'est pas isolé, il vient

$$\boxed{E' - E = W}$$

où W est l'énergie reçue par le système dans la collision. Remarquons que W est négatif si le système fournit de l'énergie à l'extérieure, sous forme de travail, de chaleur ou de rayonnement par exemple.

5.2 Collision élastique

La collision est dite élastique lorsque les particules restent les mêmes et que l'énergie cinétique est conservée.

Considérons une particule de masse m , animée d'une vitesse \vec{v} qui entre en collision avec une particule de masse M , initialement immobile. Après la collision la particule de masse m est animée de la vitesse \vec{v}' tandis que la particule de masse M prend la vitesse \vec{V}' .

Les équations de conservation s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{P} & : = m\vec{v} = \vec{P}' := m\vec{v}' + M\vec{V}' \\ E_c & : = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = E'_c := \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 + \frac{1}{2}M\vec{V}'^2 \end{aligned}$$

Bien que nous ne connaissions pas \vec{v}' , nous représentons la collision dans le plan formé par \vec{v} et \vec{v}' . Ce plan contient également \vec{V}' car la conservation de l'impulsion implique que \vec{V}' est une combinaison linéaire de \vec{v} et \vec{v}' .

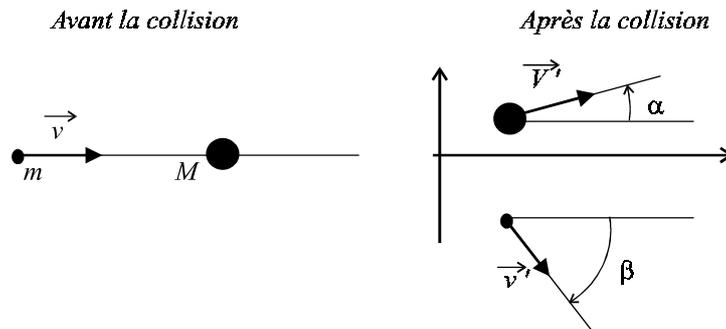


fig. 5.1 : Collision élastique.

La conservation de l'impulsion, en projection sur les deux axes de la figure 5.1 s'écrit

$$mv = mv' \cos \beta + MV' \cos \alpha, \quad 0 = mv' \sin \beta + MV' \sin \alpha$$

où α et β sont les angles orientés de la figure 5.1 ($\alpha > 0$ et $\beta < 0$).

La conservation de l'énergie fournit une équation supplémentaire

$$mv^2 = mv'^2 + MV'^2$$

v , v' et V' sont les normes des vitesses correspondantes.

Attention ! Les conditions initiales étant données, les inconnues sont α , β , v' et V' . Nous ne disposons que de trois équations, il n'est donc pas possible de résoudre complètement le système sans une condition supplémentaire. De façon générale, les équations de conservation fournissent des relations nécessairement satisfaites dans la collision sans fournir toutes les équations indispensables pour la connaissance de l'état final.

Premier exemple. Parmi les collisions possibles dont nous avons posé les équations, considérons celle pour laquelle $\alpha = \pi/2$. Dans ces conditions

$$mv = mv' \cos \beta, \quad 0 = mv' \sin \beta + MV', \quad mv^2 = mv'^2 + MV'^2$$

Des deux premières équations on déduit

$m^2v'^2 = (mv' \cos \beta)^2 + (mv' \sin \beta)^2 = m^2v^2 + M^2V'^2$. En utilisant cette expression dans la troisième équation on obtient, après simplification, $0 = (M + M^2/m)V'^2$ ce qui conduit à la valeur $V' = 0$. En reportant cette valeur dans les équations initiales, on trouve $v = v' \cos \beta$, $0 = v' \sin \beta$, $v = v'$. Les quantités v et v' étant positives (ce sont les normes des vitesses que nous avons appelé v et v'), il n'y a qu'une seule solution : $\beta = 0$ et $v' = v$.

Que signifie physiquement cette solution ? Cette solution signifie qu'après la collision l'état est le même qu'avant la collision (la masse m a pour vitesse v et la masse M est immobile). Cette situation est générale dans les collisions élastiques ; les valeurs initiales constituent toujours l'une des solutions des équations. Ici, c'est la seule solution. Elle correspond en fait à l'absence de collision car on n'imagine pas la masse m traversant la masse M sans modification des vitesses ! Une collision avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est donc impossible.

Deuxième exemple. Supposons maintenant que nous sommes en présence d'un choc droit. Dans un tel choc, les deux masses se déplacent sur le même axe, avant et après la collision. Ce qui implique $\alpha = 0$ ou π et $\beta = 0$ ou π . Dans ce cas, il est préférable d'introduire les mesures algébriques, v , v' et V' des vitesses sur l'axe du mouvement. Nous orientons l'axe de telle sorte que $v > 0$. Le signe de v' et V' n'est pas imposé *a priori* ce sont les équations qui nous donneront éventuellement le résultat. Ces équations s'écrivent

$$mv = mv' + MV', \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

Nous disposons de deux équations pour deux inconnues, v' et V' . Le problème est donc soluble. Nous calculons v' au moyen de la première équation, nous portons la valeur trouvée dans la seconde équation, nous obtenons

$$0 = \left(1 + \frac{M}{m}\right) V'^2 - 2vV'$$

Ce qui donne deux solutions : soit $V' = 0$, soit $V' = \frac{2m}{m+M}v$. En utilisant l'expression de V' pour calculer v' au moyen de la première équation, il vient

$$\begin{array}{l} \text{solution 1 :} \quad V' = 0 \quad v' = v \\ \text{solution 2 :} \quad V' = \frac{2m}{m+M}v \quad v' = \frac{m-M}{m+M}v \end{array}$$

La première solution est celle qui correspond aux conditions initiales. Nous devons l'éliminer (absence de collision).

La seconde solution est la solution cherchée. Remarquons que V' est positif ; on s'attend, en effet, à un recul de la masse M .

Pour $m < M$, la masse m rebondit (vitesse $v' < 0$). Pour $m > M$, elle poursuit son chemin avec une vitesse plus faible ($0 < v' < v$). De plus, remarquons que dans ce cas v' est inférieure à V' . Ce qui signifie que la masse m ne traverse pas la masse M . La seconde solution est physiquement acceptable.

Remarque : A la limite $m/M \rightarrow \infty$ on constate que $V' \rightarrow 0$. La vitesse de la "grosse masse" n'est pratiquement pas modifiée (elle était nulle, elle reste nulle). Dans ce cas la vitesse de la masse m change de signe.

Troisième exemple. Considérons le cas de la collision entre un photon et un électron (effet Compton).

Nous remplaçons la particule m par un photon. La particule M est un électron. Après la collision, le système est encore constitué d'un photon et d'un électron.

On classe cette sorte de collision dans les collisions élastiques bien qu'on ne puisse pas parler de l'énergie cinétique d'un photon mais seulement de son énergie $h_P\nu$ (où h_P est la constante de Planck et ν sa fréquence).

L'impulsion d'un photon dans le vide est un vecteur dirigé dans le sens de propagation de l'onde électromagnétique associée, dont la norme est $h_P\nu/c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans la collision la fréquence du photon est modifiée, elle devient ν' .

Les équations de conservation sont encore valides mais il faut en adapter les expressions pour tenir compte de la nature même du photon.

impulsion avant		impulsion après
$\frac{h_P\nu}{c}$	=	$\frac{h_P\nu'}{c} \cos \beta + MV' \cos \alpha$
0	=	$\frac{h_P\nu'}{c} \sin \beta + MV' \sin \alpha$
énergie avant		énergie après
$h_P\nu$	=	$h_P\nu' + \frac{1}{2}MV'^2$

Nous ne pousserons pas plus avant l'étude des équations obtenues.

5.3 Choc "super-élastique"

Bien que l'énergie totale reste constante, il arrive que dans certaines collisions, l'énergie cinétique augmente. Considérons le cas d'un proton, p , de masse m qui entre en collision avec un atome d'hydrogène excité, H^* . Au cours de la collision l'atome se désexcite ($H^* \rightarrow H$). Nous admettons que la masse de l'atome d'hydrogène est pratiquement la même que celle du proton.

Nous décrivons cette collision du point de vue de "l'observateur du centre de masse".

Précisons tout d'abord quel est cet observateur.

Le système formé par les deux particules est isolé. Son centre de masse, G , est donc animé d'une vitesse constante par rapport au repère galiléen de référence, R (en effet, selon la relation 3.4, l'accélération de G est nulle). Le référentiel centré sur G dont les axes restent parallèles à ceux de R est aussi un référentiel galiléen appelé "référentiel du centre de masse", R_{cm} . L'observateur du centre de masse est un observateur qui rapporte l'espace à ce référentiel.

La vitesse de G par rapport à R_{cm} , est nulle car G est sans cesse situé à l'origine de R_{cm} . Selon 3.5, l'impulsion du système est nulle. Par conséquent, la conservation de l'impulsion s'écrit : $m\vec{v}_p + m\vec{v}_{H^*} = \vec{0} = m\vec{v}'_p + m\vec{v}'_H$ où \vec{v}_p et \vec{v}_{H^*} représentent les vitesses du proton et de l'hydrogène dans son état excité avant la collision tandis que \vec{v}'_p et \vec{v}'_H représentent les vitesses des mêmes particules après la collision.

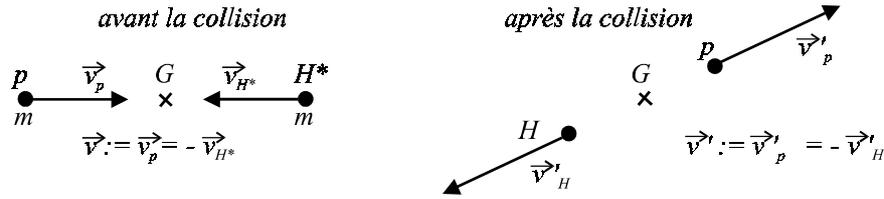


fig. 5.2 : Collision "super-élastique".

Les équations précédentes permettent de poser $\vec{v} := \vec{v}_p = -\vec{v}_{H^*}$ et $\vec{v}' := \vec{v}'_p = -\vec{v}'_H$. Nous ne connaissons pas la direction de la droite qui porte \vec{v}'_p et \vec{v}'_H ; toutes les directions sont *a priori* possibles.

La conservation de l'énergie doit prendre en compte l'énergie interne de l'atome d'hydrogène. Dans son état de plus basse énergie, H , l'atome possède une énergie interne E_0 . Lorsqu'il est dans l'état excité, H^* , son énergie interne est $E_0 + \delta E$. L'énergie du système est la somme des énergies cinétiques et des énergies internes. La conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{1}{2}m(\vec{v}_p)^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_{H^*})^2 + E_0 + \delta E = \frac{1}{2}m(\vec{v}'_p)^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}'_H)^2 + E_0.$$

On en déduit que lors de la collision l'énergie cinétique s'est accrue de δE . Par conséquent $(\vec{v}')^2 = (\vec{v})^2 + \delta E/m$.

Les équations de conservation donnent la norme de la vitesse des particules après la collision mais elles ne permettent pas de connaître la direction (ni le sens) de chacune des vitesses qui sont cependant colinéaires.

Admettons par exemple que l'énergie cinétique initiale totale ait pour valeur $m(\vec{v})^2 = 10 \text{ eV}$ (ce qui implique $\|\vec{v}\| \simeq \sqrt{10 \times 1,6 \cdot 10^{-19}/1,67 \cdot 10^{-27}} \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$). Pour l'hydrogène, la différence d'énergie, δE , entre le premier niveau excité[†] et le niveau fondamental est $\delta E \simeq 10 \text{ eV}$. Dans ces conditions on trouve que l'énergie cinétique est multipliée par 2 dans la collision; les vitesses sont donc multipliées par $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

5.4 Collisions inélastiques

Les collisions inélastiques sont celles dans lesquelles l'énergie cinétique n'est pas conservée. Les collisions "super-élastiques" sont donc des collisions inélastiques. Il existe cependant de nombreux autres types de collisions inélastiques, par exemple celles au cours desquelles l'énergie cinétique décroît.

Premier exemple. Un proton entre en collision avec un atome d'hydrogène H . L'atome d'hydrogène est excité dans la collision et passe dans l'état H^* . Comme précédemment, nous décrivons la collision dans le système du centre de masse.

Avant et après la collision les vitesses sont

$$\vec{v} := \vec{v}_p = -\vec{v}_H \text{ et } \vec{v}' := \vec{v}'_p = -\vec{v}'_{H^*}.$$

La conservation de l'énergie s'écrit $m(\vec{v})^2 + E_0 = m(\vec{v}')^2 + E_0 + \delta E$, ce qui implique $(\vec{v}')^2 = (\vec{v})^2 - \delta E/m$. Une telle collision n'est possible que sous la condition $(\vec{v})^2 - \delta E/m > 0$ soit $m(\vec{v})^2 > \delta E$. L'énergie cinétique initiale doit donc être supérieure à l'énergie qui sera stockée sous forme d'énergie interne dans l'atome d'hydrogène. Dans

[†]Rappelons que l'énergie interne des atomes est quantifiée : elle n'est susceptible de prendre que certaines valeurs discrètes E_n , caractéristiques de l'atome considéré. Un état atomique d'énergie E_n constitue "un niveau atomique". Le niveau fondamental est celui qui possède une énergie minimale. C'est généralement un niveau stable.

tous les cas la diminution d'énergie cinétique est égale à l'énergie interne stockée dans l'atome tandis que l'énergie totale est conservée.

Attention ! La relation $m(\vec{v})^2 > \delta E$ ne signifie pas que dans la collision l'atome d'hydrogène sera nécessairement excité, cela signifie seulement que cette excitation est possible. Des collisions élastiques sont également possibles. Par contre, $m(\vec{v})^2 < \delta E$ implique que, dans la collision, l'atome d'hydrogène ne peut pas être excité. Dans ce cas, la collision est donc nécessairement élastique puisqu'il n'existe pas d'autre alternative.

Second exemple. Une masse m de vitesse \vec{v} entre en collision avec une masse M initialement immobile. Dans la collision les deux masses se soudent pour former une masse $M + m$ animée de la vitesse \vec{v}' . Une telle collision constitue un "choc mou".

La conservation de l'impulsion s'écrit $m\vec{v} = (M + m)\vec{v}'$, soit $\vec{v}' = \frac{m}{m + M}\vec{v}$.

La variation d'énergie cinétique est $\Delta E_c := \frac{1}{2}(M + m)\vec{v}'^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{-mM}{2(m + M)}\vec{v}^2$

L'énergie cinétique a diminué. La conservation de l'énergie implique donc qu'une autre forme d'énergie est apparue. L'énergie thermique $E_{th} = \frac{mM}{2(m + M)}\vec{v}^2$ est apparue et il s'est produit une élévation de température du système.

Remarquons que $m \ll M$ implique que l'énergie cinétique de la "grosse masse", $E'_{c-(M+m)}$, après la collision est négligeable devant l'énergie cinétique initiale de la petite masse, E_{c-m} :

$$E'_{c-(M+m)} = \frac{1}{2}(M + m)\vec{v}'^2 = \frac{m}{m + M} \times \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \ll \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = E_{c-m}$$

Toute l'énergie cinétique de la petite masse est transformée en chaleur.

$$-E_{th} = \Delta E_c = E'_{c-(M+m)} - E_{c-m} = \frac{-M}{m + M} \times \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \simeq -\frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

L'impulsion de la grosse masse, $m + M$, est la même que l'impulsion initiale de la petite masse, elle n'est pas négligeable. Cependant la vitesse de recul $\|\vec{v}'\|$ est petite devant $\|\vec{v}\|$. Dans un tir forain, les balles de plomb, de masse m , viennent s'écraser sur une plaque d'acier, celle-ci, solidaire d'une baraque fixé à la Terre constitue le corps de masse M . La plaque d'acier reste immobile tandis que la température s'élève. Avant que la chaleur ne diffuse dans la plaque d'acier, l'énergie cinétique de la balle se transforme en chaleur dans la balle. Celle-ci s'écrase, sa température s'élève et atteint parfois la température de fusion.

5.5 Origine de la pression d'un gaz

Ce paragraphe est d'une importance particulière car nous utiliserons ultérieurement les résultats obtenus pour déterminer la pression d'un gaz. Ici, notre propos est seulement d'en saisir l'origine.

Considérons une masse M sur laquelle des particules de masse $m \ll M$ exercent des chocs répétés. L'effet d'un seul choc sur le mouvement de M est négligeable (cf. la remarque du deuxième exemple page 54). Cependant après un grand nombre de chocs, il apparaît un effet moyen notable que nous voulons étudier.

Considérons l'intervalle de temps $[t_0, t'_0]$ très petit : $t'_0 - t_0 = \Delta t$ est considéré comme un intervalle infinitésimal. Dans cet intervalle de temps, nous supposons cependant, que le nombre de collisions est très grand. On observe alors l'effet moyen de ces collisions sur M .

A l'instant t_0 la masse M a pour vitesse \vec{V}_0 , sa vitesse à l'instant t'_0 est \vec{V}'_0 . Considérons le système formé par la masse M et l'ensemble des particules qui vont entrer

en collision avec M pendant l'intervalle de temps $[t_0, t'_0]$. Ces particules sont numérotées; leur impulsion est \vec{p}_k avant la collision et \vec{p}'_k après. La conservation de l'impulsion s'écrit

$$M\vec{V}_0 + \sum \vec{p}_k = M\vec{V}'_0 + \sum \vec{p}'_k$$

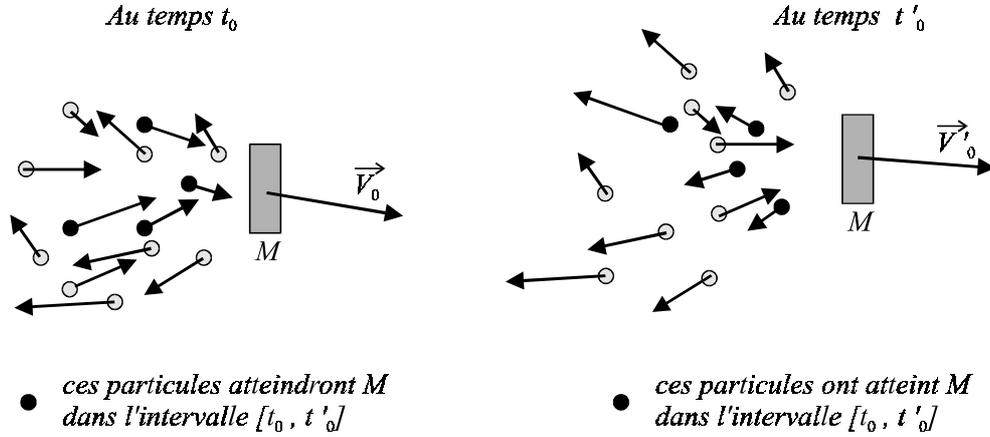


fig. 5.3 : Collisions de particules légères sur la masse M .

Posons $\Delta\vec{P} := \sum \vec{p}'_k - \sum \vec{p}_k$. La quantité $\Delta\vec{P}$ représente la variation d'impulsion des particules légères qui entrent en collision avec M pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t'_0 - t_0$. Bien que le nombre de collisions soit très élevé, l'effet de chaque collision est si petit que $\Delta\vec{P}$ peut être considérée comme une quantité infinitésimale. La conservation de l'impulsion s'écrit encore

$$M(\vec{V}'_0 - \vec{V}_0) = -\Delta\vec{P}$$

La vitesse de M a varié dans l'intervalle de temps $[t_0, t'_0]$, l'accélération moyenne subie par M est $\vec{\gamma}_M = (\vec{V}'_0 - \vec{V}_0) / \Delta t$ (cf. la définition de l'accélération). L'équation précédente s'écrit encore $M\vec{\gamma}_M\Delta t = -\Delta\vec{P}$. Si on se contente d'observer la masse M sans soupçonner l'existence des particules légères, on constate que M subit une accélération. On en déduit qu'une cause inconnue applique sur M une force $\vec{F} = M\vec{\gamma}_M$ (cf. la loi fondamentale). Les chocs répétés des particules légères produit donc sur M un effet moyen analogue à celui d'une force \vec{F} :

$$\vec{F} = -\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \tag{5.2}$$

Mais qu'observe-t-on ? Avec des appareils aux performances illimitées, en filmant la masse M on pourrait, constater que sa vitesse varie brusquement à chaque collision mais en réalité on n'observe que l'effet moyen due à un très grand nombre de collisions. L'introduction de la force \vec{F} décrit donc parfaitement l'interaction entre les particules et la masse M , à la précision des appareils de mesure. La force \vec{F} apparaît comme une force "ordinaire" qu'il convient d'ajouter aux autres forces $\vec{\Phi}$, qui agissent éventuellement sur M pour obtenir la résultante de toutes les forces.

Considérons le manomètre de la figure 1.6 page 12. Le piston est soumis à de multiples collisions dues aux molécules de gaz, l'effet moyen en est une force dite "**force de pression**". Cette force est équilibrée par la force élastique qu'exerce le ressort.

En guise de conclusion, remarquons que l'établissement de l'expression 5.2 ne fait pas intervenir la conservation de l'énergie; cette relation est donc indépendante de la nature des collisions avec la paroi (élastique ou non).

