

Quatrième partie

Hydrostatique,  
hydrodynamique des fluides  
parfaits



## Chapitre 11

### LE THÉOREME DE BERNOULLI

Le principe de conservation de l'énergie est très général. Nous allons montrer qu'il permet d'établir le théorème de Bernoulli pour les fluides parfaits incompressibles.

#### 11.1 Généralités sur l'écoulement des fluides

En observant un petit morceau de bois emporté par un cours d'eau (ou par l'eau d'un caniveau que l'on nettoie), on distingue deux types d'écoulements.

##### 1. L'écoulement laminaire (ou lamellaire).

Lorsque la vitesse n'est pas trop grande, le bout de bois emporté par le courant suit une trajectoire bien définie ; son mouvement est prédictible. Si vous lâchez un autre bout de bois du même endroit, il décrira la même trajectoire que le premier bout de bois. La trajectoire du bout de bois matérialise une "*ligne de courant*". Les lignes de courant sont les lignes suivies par un petit volume du fluide qui s'écoule.

##### 2. L'écoulement turbulent.

Observez maintenant le mouvement du bout de bois derrière un galet qui affleure (ou mettez le pied dans le caniveau). Les mouvements sont désordonnés et imprédictibles. L'écoulement est dit turbulent. Un autre exemple est celui des turbulences qui apparaissent derrière une barrière de congère où les flocons de neige emportés par le vent matérialisent le mouvement de l'air.

Dans ce cours, nous étudions seulement le **régime laminaire**.

La particule de fluide qui passe en un point  $M$  à l'instant  $t$  est animée d'une vitesse  $\vec{V}_M$ . Nous limitons notre étude au cas des **régimes permanents**. Cela signifie que dans une région donnée du fluide, les propriétés sont les mêmes à chaque instant. Par conséquent  $\vec{V}_M$  est indépendant du temps, de même que la masse volumique  $\rho_M$  au point  $M$ , ou que la pression  $P_M$ .

**Attention !** Toute particule qui passe en  $M$  a une vitesse bien définie, toujours la même. Cependant, la vitesse d'une particule de fluide peut changer au cours de son trajet. Pensez aux voitures à la sortie de Paris sur l'autoroute de l'ouest. Si vous restez au tunnel de Saint-Cloud, vous constaterez que les automobiles ont toutes la même vitesse (10 km/h ou moins, les jours d'embouteillages !) mais si vous êtes dans la voiture votre vitesse ne sera pas toujours 10 km/h (sauf lorsque vous passerez le tunnel de Saint-Cloud !).

En chaque point  $M$  du fluide, passe une ligne de courant. La vitesse  $\vec{V}_M$  est tangente à la ligne de courant.

L'ensemble des lignes de courant qui traversent une surface  $S$  constitue "*un tube de courant*".

Si la section transversale du tube est assez petite, les vitesses au voisinage d'un point  $A$  ou  $B$  quelconque sont toutes pratiquement parallèles et de même norme. Dans ce cas le tube de courant est "*un tube de courant élémentaire*".

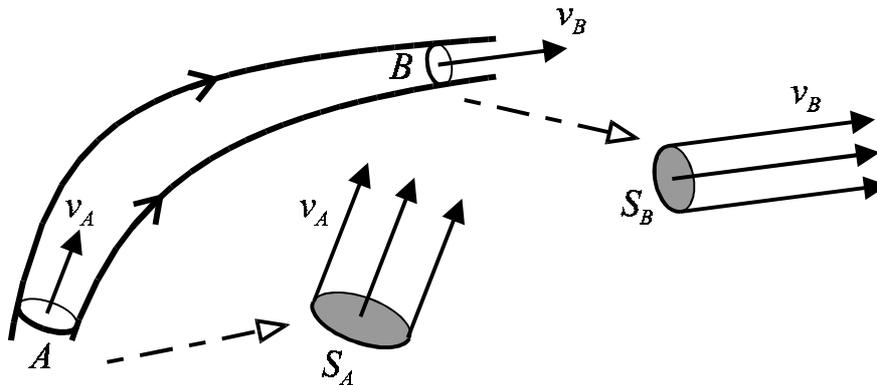


fig. 11.1 : Tube de courant élémentaire.

Les sections droites, sections du tube perpendiculaires aux lignes de courant (c'est à dire aux vitesses), ont pour aire  $S_A$  et  $S_B$ . Les vitesses en  $A$  et  $B$  sont  $v_A$  et  $v_B$ .

Pendant le temps  $dt$ , il entre dans le tube, en  $A$ , le volume  $S_A v_A dt$ . La masse volumique en  $A$  est  $\rho_A$ . La masse qui entre dans le tube est donc  $\rho_A S_A v_A dt$ . Dans le même temps il sort en  $B$  la masse  $\rho_B S_B v_B dt$ .

La surface latérale du tube de courant est formée de ligne de courants, le fluide longe cette surface et aucune matière ne la traverse.

Le régime étant permanent, la masse de fluide dans le tube de courant, entre  $S_A$  et  $S_B$ , est constante, ce qui implique  $\rho_A S_A v_A dt = \rho_B S_B v_B dt$ . Cette relation est **la relation de conservation du débit massique**,  $Q_m$  dans le tube.

$$\boxed{Q_m = \rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B} \quad (11.1)$$

Pour un fluide incompressible, la masse volumique ne dépend pas du point considéré :  $\rho_A = \rho_B := \rho$ . Dans ce cas la conservation du débit en masse équivaut à la conservation du **débit en volume**,  $Q_V$ , dans le tube.

$$\rho_A = \rho_B := \rho \Rightarrow \boxed{Q_V = S_A v_A = S_B v_B}$$

Considérons un fluide qui s'écoule dans un tuyau cylindrique. Le plus souvent, le frottement du tuyau ralentit le fluide et on peut même considérer que le fluide colle à la paroi. La vitesse croît progressivement de la paroi vers le centre où elle est maximale.

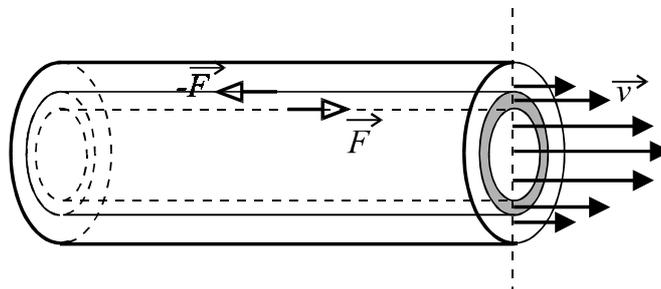


fig. 11.2 : Ecoulement visqueux à faible vitesse.

Le profil des vitesses est représenté sur la figure 11.2. Les régions périphériques, lentes, freinent les régions centrales tandis que celles-ci plus rapides entraînent les régions

périphériques. Des forces de frottement,  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  apparaissent sur les faces latérales du petit cylindre creux représenté sur la figure 11.2. La force qui s'exerce sur une surface latérale d'aire élémentaire  $dS$  est proportionnelle à  $dS$ .

Cette capacité du fluide à produire des frottements internes est appelée "viscosité"<sup>†</sup>. Pour lutter contre la viscosité et assurer l'écoulement permanent dans le tuyau, il faut fournir au fluide un travail moteur. Dans la suite **nous considérons des fluides sans viscosité**; plus précisément nous supposons que le travail nécessaire pour combattre les frottements internes est négligeable.

En l'absence de viscosité, la vitesse dans un tuyau de section constante est uniforme. Un tel tuyau dans son ensemble peut donc être considéré comme un tube de courant élémentaire, tel que nous l'avons défini plus haut, même si ses dimensions transversales ne sont pas petites.

### 11.2 Le théorème de Bernoulli

Considérons un tube élémentaire de fluide, limité à l'instant  $t$  par les sections droites  $S_A(t)$  et  $S_B(t)$ . A l'instant  $t + dt$  la matière du tube s'est déplacée. Le point  $B$  a progressé de  $v_B dt$  et le point  $A$  de  $v_A dt$ .

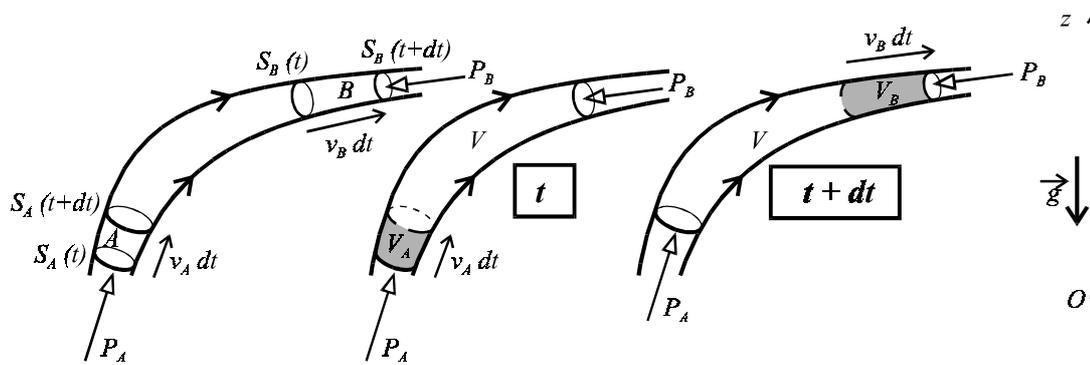


fig. 11.3

A l'instant  $t + dt$ , la même matière est comprise entre les sections  $S_A(t + dt)$  et  $S_B(t + dt)$ . L'élément différentiel  $dt$  étant infiniment petit, les aires  $S_A$  et  $S_B$ , n'ont pratiquement pas varié; les volumes  $V_A$  et  $V_B$  sont infiniment petits; la vitesse de la matière peut y être considérée comme uniforme, de norme  $v_A$  et  $v_B$ .

A l'instant  $t$ , le tube compris entre  $S_A(t)$  et  $S_B(t)$  est la réunion de deux volumes, le volume  $V_A$  et le volume  $V$ . Le volume  $V_A$  peut être assimilé à un petit cylindre de masse  $\rho_A S_A v_A dt$  et d'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \rho_A (S_A v_A dt) (v_A)^2$ , dont l'énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre est  $\rho_A (S_A v_A dt) g z_A$  où  $g = \|\vec{g}\|$  est l'accélération de la pesanteur tandis que  $z_A$  est l'altitude du point  $A$ .

A l'instant  $t + dt$ , le même système matériel est la réunion des deux volumes  $V$  et  $V_B$ . La matière contenue dans le volume  $V$  à l'instant  $t + dt$  n'est pas la même que la matière contenu dans le même volume à l'instant  $t$ , cependant le régime étant permanent, les énergies cinétiques et potentielles du volume  $V$  sont les mêmes aux deux instants.

Le tableau ci-dessous où  $Q_m = \rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B$  est le débit en masse dans le tube, donne l'expression des énergies cinétique et potentielle des divers volume qui constituent le système.

<sup>†</sup>L'étude des écoulements et des déformations des matériaux est un domaine de la physique appelé "rhéologie". Les propriétés des matériaux sont complexes et leur description du point de vue rhéologique ne se limite pas seulement à l'introduction de la viscosité.

$t$		én. cinétique	én. potentielle
	$V_A$	$(1/2) v_A^2 Q_m dt$	$gz_A Q_m dt$
	$V$	$E_c$	$E_p$
$t + dt$		én. cinétique	én. potentielle
	$V_B$	$(1/2) Q_m v_B^2 dt$	$gz_B Q_m dt$
	$V$	$E_c$	$E_p$

Les énergies mécaniques du système aux instants  $t$  et  $t + dt$  sont  $E_m(t)$  et  $E_m(t + dt)$ . La variation d'énergie mécanique est

$$E_m(t + dt) - E_m(t) = \left\{ \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) \right\} Q_m dt \quad (11.2)$$

La conservation de l'énergie implique que cette variation d'énergie mécanique doit être fournie au système pendant le temps  $dt$ . Cette énergie est le travail des forces de pression, les seules forces dont le travail n'a pas été pris en compte dans le calcul des énergies potentielles.

La force qui agit sur  $S_A$  est  $P_A S_A$  où  $P_A$  est la pression en  $A$ . Son travail est  $P_A S_A v_A dt$  où  $v_A dt$  est le déplacement du point d'application de la force. Cette force est motrice. De même le travail de la force de pression en  $B$  est  $-P_B S_B v_B dt$  (ce travail étant résistant, il est négatif). En remplaçant  $S_A v_A$  et  $S_B v_B$  par  $Q_m/\rho_A$  et  $Q_m/\rho_B$ , l'expression du travail fourni au système s'écrit

$$\delta W = \left( \frac{P_A}{\rho_A} - \frac{P_B}{\rho_B} \right) Q_m dt \quad (11.3)$$

La conservation de l'énergie, qui prend ici la forme du théorème de l'énergie mécanique, s'écrit  $E_m(t + dt) - E_m(t) = W$ . Pour un fluide incompressible, on obtient la relation

$$\boxed{\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + P_B}$$

Cette relation constitue le **théorème de Bernoulli** (un seul "i" s'il vous plaît !).

### 11.3 Généralisation du théorème de Bernoulli

Rappelons ici les résultats obtenus précédemment.

- La conservation de la masse (equ. 11.1) :

$$Q_m = \rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B$$

- La variation d'énergie mécanique entre deux instants voisins (equ. 11.2) :

$$E_m(t + dt) - E_m(t) = \left\{ \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) \right\} Q_m dt$$

- Le travail des forces de pression (equ. 11.3) :

$$\delta W = \left( \frac{P_A}{\rho_A} - \frac{P_B}{\rho_B} \right) Q_m dt$$

Nous considérons maintenant que l'énergie interne par unité de masse de fluide peut varier sur la ligne de courant. L'énergie interne des volumes  $V_A$  et  $V_B$  est donc  $u_A Q_m dt$  et  $u_B Q_m dt$  où  $u_A$  et  $u_B$  sont les énergies internes par unité de masse, respectivement en  $A$  et  $B$ .

Supposons en outre qu'entre  $A$  et  $B$  un moteur fournisse la puissance  $\mathcal{P}_{AB}$  au fluide (éventuellement négative dans le cas où le système fournit de l'énergie au lieu d'en consommer). La conservation de l'énergie s'écrit alors

$$Q_m \left\{ \left( \frac{1}{2} v_B^2 + gz_B + u_B + \frac{P_B}{\rho_B} \right) - \left( \frac{1}{2} v_A^2 + gz_A + u_A + \frac{P_A}{\rho_A} \right) \right\} = \mathcal{P}_{AB}$$

En  $A$ , la masse du volume  $V_A$  est  $\rho_A S_A v_A dt$ , l'enthalpie du volume  $V_A$  est  $dH_A = \rho_A S_A v_A dt u_A + P_A S_A v_A dt$ .

L'enthalpie par unité de masse est donc  $\frac{dH_A}{\rho_A S_A v_A dt} := h_A = u_A + \frac{P_A}{\rho_A}$ . De même en  $B$  l'enthalpie par unité de masse est  $u_B + \frac{P_B}{\rho_B}$ . La conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\boxed{\left( \frac{1}{2} v_B^2 + gz_B + h_B \right) - \left( \frac{1}{2} v_A^2 + gz_A + h_A \right) = \frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_m}} \quad (11.4)$$

Dans le cas des fluides incompressibles, nous admettons que la masse volumique,  $\rho$ , est uniforme dans tout le fluide et que l'énergie interne par unité de masse est constante le long d'une ligne de courant. Cette hypothèse est légitime si on admet que l'environnement moléculaire est le même en tout point, quelle que soit la pression. Dans ces conditions il vient  $h_B - h_A = \frac{P_B - P_A}{\rho}$ . On trouve alors

$$\boxed{\left( \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho gz_B + P_B \right) - \left( \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho gz_A + P_A \right) = \frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_V}} \quad (11.5)$$

où  $Q_V$  est le débit en volume :  $Q_V = Q_m / \rho = \boxed{S_A v_A = S_B v_B}$ .



## Chapitre 12 APPLICATIONS DU THÉORÈME DE BERNOULLI

### 12.1 Application à l'hydrostatique

Considérons un fluide homogène au repos. On peut considérer qu'il s'écoule avec une vitesse nulle selon des lignes de courant à notre convenance.

Considérons deux points  $A$  et  $B$  dans le fluide. Nous imaginons une ligne de courant qui joint  $A$  et  $B$ . Nous appliquons le théorème de Bernoulli avec  $v_A = v_B = 0$ . Il vient

$$\boxed{P_B - P_A = \rho g (z_A - z_B) := \rho g h} \quad (12.1)$$

où  $h$  est la différence d'altitude entre les points  $B$  et  $A$  (cf. fig 12.1 a). Cette relation constitue le *théorème de Pascal* (voir équ. 1.2 page 13).

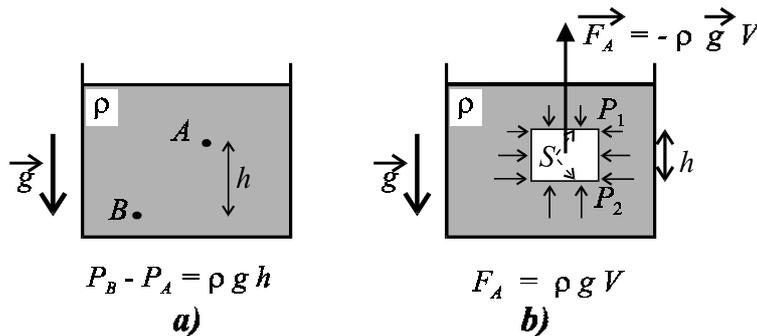


fig. 12.1 : Théorème de Pascal.

Immerçons un petit parallélépipède rectangle dans un fluide de masse volumique  $\rho$ , au repos (fig. 12.1 b). L'aire de la base (horizontale) est  $S$ . Les forces qui s'exercent sur les bases sont verticales; elles ont pour norme  $F_1 = P_1 S$  sur la face supérieure et  $F_2 = P_2 S$  sur la face inférieure. Les forces latérales se compensent. La résultante de toutes les forces est donc une force verticale,  $F_{\text{Arch}}$ , dirigée du bas vers le haut, appelée "**puissance d'Archimède**" :  $F_{\text{Arch}} = (P_2 - P_1) S$  avec  $P_2 - P_1 = \rho g h$ . Le volume du parallélépipède est  $Sh$ . On obtient donc

$$\boxed{F_{\text{Arch}} = \rho g V}$$

$V$  est le volume de fluide déplacé par le parallélépipède,  $\rho V$  est la masse de ce volume; **la poussée d'Archimède est égale au poids du volume de fluide déplacé**. Cette propriété est générale, quelle que soit la forme du corps immergé.

**Attention!** L'expression de la poussée d'Archimède suppose que le volume immergé est complètement entouré par le fluide. S'il repose au fond, seule la pression  $P_1$  agit, créant une force qui pousse le corps vers le bas. Ainsi, si un baigneur colle son dos au sol d'une piscine il se trouve plaqué au fond. A une profondeur de 2m, compte tenu

de la pression atmosphérique, sur une surface de  $50 \times 20 \text{ cm}^2$  la force est approximativement égale au poids sur Terre d'une masse de 1200 kg (plus d'une tonne!). Le baigneur ne pourrait pas se dégager. Fort heureusement un contact parfait entre le dos du baigneur et le sol de la piscine, sur une telle surface, est difficilement réalisable.

Considérons quelques exemples d'application du théorème de Pascal.

Premier exemple. La pression atmosphérique au niveau de la mer est voisine de  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . La masse volumique de l'air dans l'atmosphère est généralement inférieure à  $\rho \simeq 1,3 \text{ kg m}^{-3} := \rho_M$ . La différence de pression atmosphérique  $\Delta P$ , entre le niveau de la mer et un point d'altitude  $h$  est donc inférieure à  $\rho_M g h$ . Cette différence est négligeable lorsque  $\Delta P < \rho_M g h \ll P_0$ . Soit  $h \ll 7600 \text{ m}$ . La pression atmosphérique peut donc être considérée comme constante lorsque  $h$  n'excède pas quelques dizaines de mètres (voire plusieurs centaines de mètres si la précision des calculs le permet). La pression atmosphérique dépend malgré tout de l'altitude; cette propriété est utilisée dans certains altimètres.

Deuxième exemple.

La figure 12.2 a) représente deux liquides non miscibles dans un tube en U.

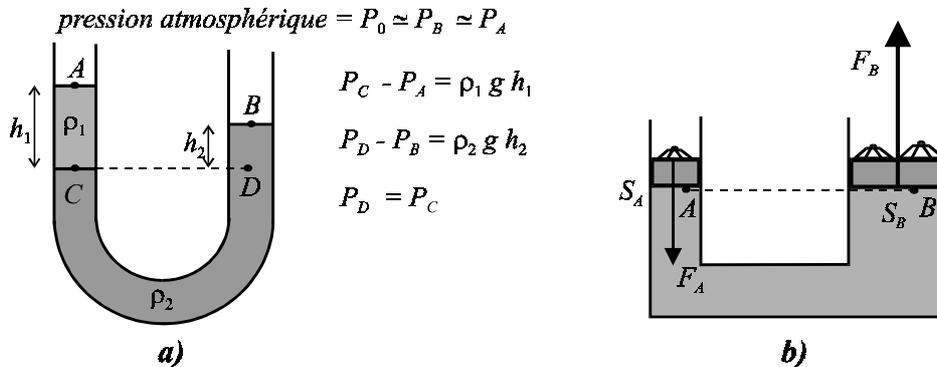


fig. 12.2

Le liquide le moins dense surnage ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Les points  $C$  et  $D$  appartiennent au même fluide de masse volumique  $\rho_2$ ; ils sont dans le même plan horizontal ( $h = 0$ ), les pressions en ces points,  $P_C$  et  $P_D$ , sont donc égales.

Les points  $A$  et  $C$  appartiennent au même fluide de masse volumique  $\rho_1$ . Le théorème de Pascal fournit la pression en  $A$  sous la forme  $P_A = P_C - \rho_1 g h_1$ . De même  $P_B = P_D - \rho_2 g h_2$ . Les points  $A$  et  $B$  appartiennent également à l'atmosphère. La pression en  $A$  et  $B$  est donc la pression atmosphérique :  $P_A = P_B = P_0$ . On déduit des relations précédentes  $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$  ce qui fournit la relation entre  $h_2$  et  $h_1$ .

Troisième exemple. Sur la figure 12.2 b) nous avons schématisé **une presse hydraulique**. Les points  $A$  et  $B$  sont sur le même plan horizontal, ils appartiennent au même fluide, la pression y est la même :  $P_A = P_B$ . Cette relation est encore pratiquement vérifiée si la pression dans le fluide est élevée et si la dénivelée entre  $A$  et  $B$  est petite (voir le premier exemple ci-dessus, *mutatis mutandis*). On énonce cette propriété : "**Les fluides transmettent les pressions**". Sur le piston en  $A$  on exerce la force  $\vec{F}_A$  de norme  $F_A$ , représentée sur la figure. Cette force crée dans le fluide la pression  $P_A = F_A/S_A$  où  $S_A$  est la surface du piston. Cette pression est transmise en  $B$ . Le fluide exerce alors sur le piston en  $B$  la force  $F_B = P_B S_B = P_A S_B = F_A \frac{S_B}{S_A}$ . Pour  $S_B \gg S_A$  il vient  $F_B \gg F_A$ . Certains crics hydrauliques employés dans les garages fonctionnent sur ce principe. La force  $F_A$  est exercée sur un petit piston au moyen d'un levier. La pression est transmise

à un piston de surface beaucoup plus importante qui exerce alors une force capable de soulever un camion. Ce principe est celui des vérins hydrauliques.

### 12.2 Application aux écoulements permanents

Bien que les fluides réels ne soient pas parfaits ni que les régimes ne soient pas toujours laminaires, le théorème de Bernoulli fournit le plus souvent des ordres de grandeur convenables pour l'estimation des vitesses et des pressions. Nous considérons ci-dessous divers exemples où  $g \simeq 10 \text{ m s}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur.

**Exemple 1.** Un fluide s'écoule dans un tube horizontal ( $z = 0$ ), de section constante. La vitesse d'écoulement est donc uniforme ( $V = \text{cte}$ ). Le théorème de Bernoulli implique que la pression,  $P$ , est constante le long du tube. Cette pression peut être visualisée grâce à des tubes verticaux dans lesquels le poids de liquide immobile équilibre la force pressante latérale du fluide en mouvement. Plus précisément, la pression  $P$  est égale à  $P_0 + \rho gh$  où  $P_0$  est la pression atmosphérique.

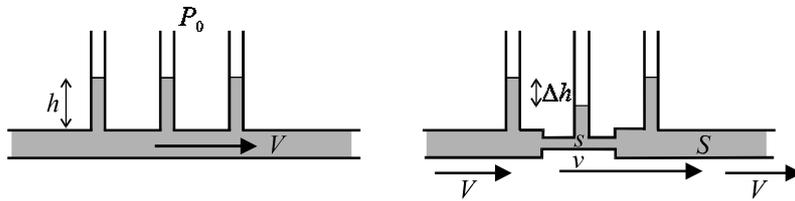


fig. 12.3 : Phénomène de Venturi.

Si le tube se rétrécit, sa section passe de la valeur  $S$  à la valeur  $s$ . La vitesse passe de la valeur  $V$  à la valeur  $v$ . Le débit restant constant, il vient  $SV = sv$ . La vitesse augmente :  $v = (S/s)V > V$ . La pression passe de la valeur  $P$  à la valeur  $p$ . Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow P - p = \rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho \left( \left( \frac{S}{s} \right)^2 - 1 \right) V^2$$

$$\Delta h = \frac{V^2}{2g} \left( \left( \frac{S}{s} \right)^2 - 1 \right)$$

Le niveau baisse de la hauteur  $\Delta h$  (cf. figure 12.3).

**Attention !** La pression baisse quand la vitesse augmente, c'est à dire quand le tube est plus étroit. Ce phénomène est connu sous le nom de phénomène de Venturi.

En réalité, les frottement que nous avons négligé entraînent une baisse de pression continue dans le tube. La quantité  $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + P$  est appelée "la charge". Les écoulements réels s'accompagnent d'une perte de charge (voir la figure 12.4).



fig. 12.4 : La perte de charge  $\Rightarrow h_2 < h_1$ .

**Exemples 2.** Un anévrisme se présente schématiquement sous la forme d'une dilatation locale d'une artère (fig. 12.5 a). La section  $S_A$  est supérieure à la section  $S_B$ . La vitesse du sang en  $A$  est donc plus petite que la vitesse en  $B$ . La pression  $P_A$  est donc supérieure à  $P_B$ . Dans la région saine de l'artère,  $P_B$  équilibre la pression des tissus extérieure, il apparaît donc que l'excès de pression en  $A$  accroît la fragilité de l'artère au niveau de l'anévrisme et favorise sa rupture.

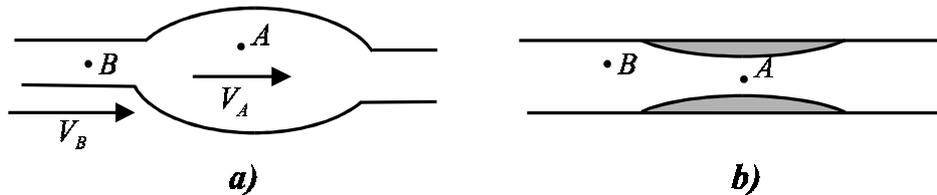


fig. 12.5 : Anévrisme et thrombose.

Dans le cas d'une artère partiellement bouchée (fig. 12.5 b), la pression en  $A$  est inférieure à la pression en  $B$ . Ce qui implique un risque de pincement et accroît la probabilité d'une thrombose.

**Exemple 3.** Une conduite soutire l'eau d'un lac pour la délivrer en contrebas au point de sortie  $B$ . Nous admettons que le niveau du lac, alimenté par des rivières, ne varie pas et qu'il s'établit un régime permanent. Les lignes de courant partent d'un point  $A$  à la surface du lac.

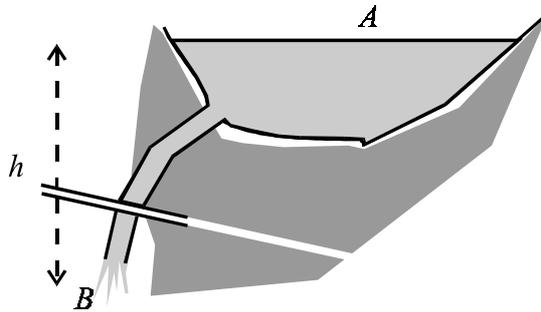


fig. 12.6 : "Conduite forcée".

La surface du lac est  $S_A$  tandis que la section de la conduite est  $S_B \ll S_A$ . La vitesse d'écoulement en  $A$  est  $v_A$ ; en  $B$ , dans la conduite, la vitesse est  $v_B$ . La conservation du débit implique  $v_A S_A = v_B S_B$  soit  $v_A = (S_B/S_A) v_B \ll v_B$ .

En  $A$  et en  $B$  la pression est  $P_0$ , pression atmosphérique (voir ci-dessus le premier exemple du § 12.1, page 114). L'utilisation du théorème de Bernoulli fournit la relation  $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + P_0 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + P_0$ . Avec  $h := z_A - z_B$  et  $v_A = (S_B/S_A) v_B$ , il vient  $\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_B^2 \left(1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right)$ . La relation  $S_B \ll S_A$  fournit la vitesse  $v_B$  de l'eau en  $B$  sous la forme

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Cette vitesse est celle d'une masse qui tombe en chute libre, sans vitesse initiale, d'une hauteur  $h$ .

**Exemple 4.** Une petite installation permet de pomper l'eau d'un étang dans un réservoir. Deux cas sont considérés suivant que l'extrémité du tuyau est ou non immergée dans le réservoir (figures 12.7 a et 12.7 b).

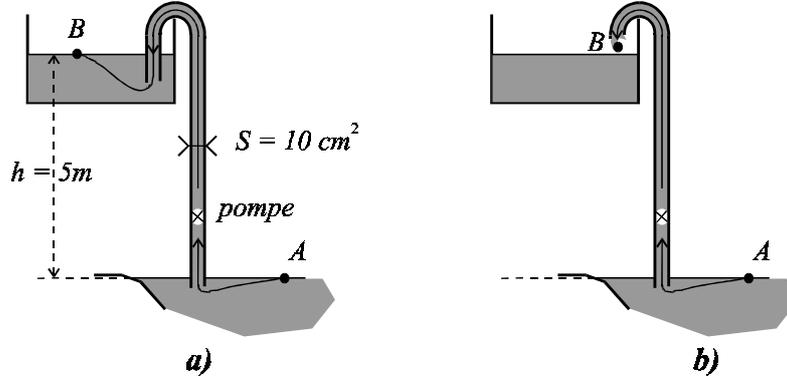


fig. 12.7

Le débit assuré par la pompe est  $Q_m = 5 \text{ kg s}^{-1}$ . L'eau étant considérée comme un fluide incompressible il vient  $Q_V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 5 \text{ l s}^{-1}$ .

Dans le cas de la figure 12.7 a) on peut considérer qu'une ligne de courant joint les points A et B. La surface de l'étang et la surface du réservoir étant importantes, on peut admettre que les vitesses en A et B sont négligeables dans l'expression 11.5 ( $\frac{1}{2} |v_B^2 - v_A^2| \ll gh$ ). D'autre part les pressions en A et B sont égales à la pression atmosphérique. Il vient donc

$$\rho gh = \frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_V}$$

Avec  $Q_V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  et  $h = 5 \text{ m}$  on trouve  $\mathcal{P}_{AB} = 250 \text{ W}$ .

Dans le cas de la figure 12.7 b),  $v_B$  n'est pas négligeable :  $v_B = Q_V/S_B = 5 \text{ m s}^{-1}$ . Les pressions en B et en A sont encore égales à la pression atmosphérique. La relation 11.5 s'écrit

$$\left( \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho gh \right) = \frac{\mathcal{P}_{AB}}{Q_V}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_{AB} = \rho Q_V \left( \frac{1}{2} v_B^2 + gh \right) = Q_m \left( \frac{1}{2} v_B^2 + gh \right) = 5 \times \left( \frac{25}{2} + 50 \right) = 312,5 \text{ W} \simeq 313 \text{ W}.$$

Les deux façons de procéder ne sont donc pas équivalentes. Dans le second cas, l'énergie cinétique de l'eau issue du tuyau est perdue, c'est l'origine de la différence constatée (62,5 W).

Bien sur, il y a des pertes d'énergie dues aux mauvais fonctionnements et frottements de toutes sortes, viscosité de l'eau, frottement dans les pièces mobiles de la pompe, etc. Pour estimer les pertes on définit le "**rendement**",  $r$ , de l'installation comme le rapport de la puissance utile,  $\mathcal{P}_{AB}$ , à la puissance que l'on doit réellement fournir,  $\mathcal{P}_R$ . En supposant un rendement de 70%, il vient :  $r = 70\% = 0,7 = \mathcal{P}_{AB}/\mathcal{P}_R$ .

On en déduit  $\mathcal{P}_R = 250/0,7 \simeq 357 \text{ W}$  dans le premier cas étudié ci-dessus et  $\mathcal{P}_R = 313/0,7 \simeq 447 \text{ W}$  dans le second cas.

En immergeant le tuyau on réalise donc une économie d'énergie de  $(447 - 357)/357 \simeq 0,25 = 25\%$ .

