

Deuxième partie

La quantification du
rayonnement

Chapitre 3

LE RAYONNEMENT À L'ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE

3.1 Introduction

L'Univers est peuplé de matière et de rayonnement. Les rayonnements que nous avons rencontrés sont soit des ondes (ondes électromagnétiques ou neutriniques), soit des rayonnements constitués par des jets de particules massives : rayonnement α ou β . Par la suite, sauf mention contraire, le terme "*rayonnement*" désignera le *rayonnement électromagnétique*.

La matière présente une grande diversité : électrons, nucléons, noyaux, atomes et molécules, etc, ainsi que toutes les particules et antiparticules produites dans des anneaux de collisions comme ceux du CERN à Genève (Centre d'Étude et de Recherches Nucléaires).

Les niveaux d'énergie au sein des noyaux, des atomes et des molécules sont quantifiés ; nous y reviendrons ultérieurement. Certaines transitions entre ces niveaux d'énergie peuvent se produire par absorption d'énergie électromagnétique ou par désexcitation radiative. Pour décrire l'ensemble de ces mécanismes, il faut connaître la structure du rayonnement (électromagnétique), la façon dont la matière est organisée et la nature des interactions possibles.

Ce cours a pour but d'introduire les concepts de base nécessaires. Plus précisément, ce chapitre est consacré à la première tentative de quantification du rayonnement qui, menée à bien par Planck en 1900, permet d'interpréter convenablement le "spectre du corps noir".

Une question difficile, posée à la fin du 19^{ème} siècle, concernait *le rayonnement électromagnétique à l'équilibre thermodynamique*. Un tel rayonnement est également appelé "*rayonnement thermique*" ou encore "*rayonnement du corps noir*" pour des raisons que l'on explicitera plus loin.

Les atomes et les molécules sont neutres en moyenne. La densité de charge n'y est cependant pas nulle en chaque point (le noyau présente une densité positive et le nuage électronique une densité négative). Dans un gaz, par exemple, sous l'effet de l'agitation thermique, les molécules entrent en collision entre elles et avec les parois du récipient qui les contient. Lors de ces collisions, la répartition des charges varie au sein des molécules et un rayonnement électromagnétique est produit. C'est ce rayonnement, conséquence de l'agitation thermique, qui constitue le rayonnement du corps noir. Un tel rayonnement est émis par tout corps, du fait qu'il n'est pas au zéro absolu. On dit qu'il est produit par "*incandescence*". Lorsque le rayonnement n'est pas d'origine thermique, on dit qu'il est produit par "*luminescence*".

N.B. Des atomes peuvent être excités par les chocs de particules accélérées à cet effet. La luminescence intervient, par exemple, lors de la désexcitation spontanée de ces atomes.

Le rayonnement du corps noir est homogène et isotrope. Pour le décrire on intro-

duit sa "**densité spectrale d'énergie**", ρ . L'énergie du rayonnement électromagnétique contenue dans l'unité de volume est la "densité d'énergie", u (en J m^{-3}). L'énergie par unité de volume, du rayonnement dont la fréquence appartient à la bande $[\nu, \nu + d\nu]$ s'écrit sous la forme $\rho d\nu$ où ρ est la densité spectrale d'énergie (en $\text{J m}^{-3} \text{Hz}^{-1}$). Ainsi il vient $u = \int_0^\infty \rho d\nu$.

Des raisonnements thermodynamiques, souvent très astucieux, permirent de démontrer de nombreuses propriétés et d'établir des lois précises. Décrivons succinctement les principaux résultats déjà connus avant l'introduction des idées de Planck.

- La densité spectrale d'énergie, ρ , est une fonction de la fréquence ν et de la température d'équilibre considéré, T . La manière dont le rayonnement d'équilibre est atteint n'intervient pas dans l'expression de $\rho(\nu, T)$. Cela signifie qu'il n'existe qu'un seul rayonnement d'équilibre thermodynamique.

- Un corps noir absorbe toutes les radiations qui tombent dessus. Au voisinage d'une telle substance, à l'équilibre thermodynamique, le rayonnement est précisément le rayonnement d'équilibre thermique. En première approximation, de nombreux systèmes possèdent cette propriété : le noir de fumée (c'est la raison pour laquelle le rayonnement d'équilibre thermique est encore appelé rayonnement du corps noir), un petit orifice dans une enceinte isotherme, un four par exemple (cf. figure 3-1), une étoile, etc...

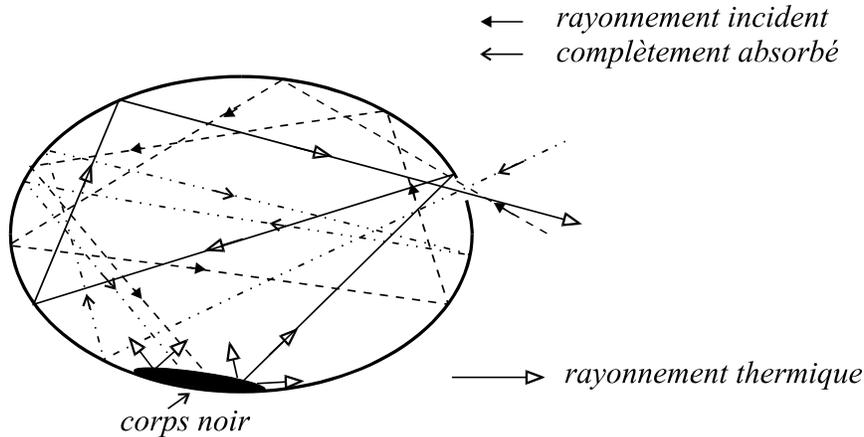


Figure 3-1.

- Considérons l'élément de surface dS de corps noir. Nous observons dS suivant la ligne de visée D , faisant avec la normale à dS un angle θ . L'apparence de la surface dS , est indépendante de θ . Ainsi une sphère incandescente apparaît comme un disque d'éclat uniforme. Le Soleil paraît plus lumineux au centre que sur les bords; ce n'est donc pas un corps noir parfait.

- La loi de Wien donne la forme de la densité spectrale d'énergie : $\rho = T^3 \Phi(\nu/T)$. On en déduit que $\rho(\nu)$ est maximal pour $\nu_m = b T$ où b est une constante.

- La densité d'énergie du rayonnement d'équilibre thermodynamique est $u = \int_0^\infty T^3 \Phi(\nu/T) d\nu = a T^4$ où $a = \int_0^\infty \Phi(x) dx$ est une constante. C'est la loi de Stefan.

Remarquons que la densité spectrale d'énergie peut être définie au moyen de la longueur d'onde. Dans ce cas $r(\lambda, T) d\lambda$ est la densité d'énergie des radiations dont la longueur d'onde appartient à l'intervalle $[\lambda - d\lambda, \lambda]$.

La relation $\lambda = c/\nu$ donne $r(\lambda, T) = \frac{\nu^2}{c} \rho(\nu, T)$ avec $\lambda \nu = c$.

N.B. Ce changement de représentation modifie la loi de déplacement de Wien : $r = T^{-5} \Psi(\lambda T)$. Le maximum de r est atteint pour $\lambda = \lambda_m = b'/T \neq \frac{c}{bT} = c/\nu_m$.

Les difficultés commencent lorsqu'on cherche la forme explicite de $\rho(\nu, T)$.

3.2 Les modes d'une cavité

Nous devons maintenant décrire la façon dont l'énergie électromagnétique se répartit dans l'espace. Le plus simple consiste à considérer une cavité parallélépipédique aux parois parfaitement réfléchissantes, dans laquelle on a déposé une parcelle de noir de fumée qui absorbe, tôt ou tard, les rayonnements présents et émet un rayonnement purement thermique.

Nous nous proposons d'étudier comment l'énergie électromagnétique se répartit dans la cavité. Nous présentons ici un modèle simple qui permet de saisir la description mathématique et les idées physiques que l'on trouvera plus développées dans le cours d'électromagnétisme.

3.2.1 Cavité à une dimension

Considérons le cas très simple d'une corde tendue dont les extrémités sont fixées en A et B . D'une pichenette nous ébranlons la corde, ce qui crée une déformation.

Le point M de la corde s'éloigne de sa position d'équilibre, M_0 . Le vecteur déplacement est $\overrightarrow{M_0M} = \vec{\delta}$, perpendiculaire à AB .

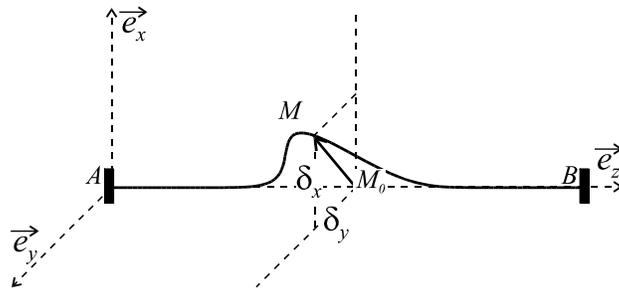


Figure 3-2.

La déformation se propage le long de AB . Elle se réfléchit aux extrémités fixes de la corde.

L'onde est dite "*transversale*" parce que le déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation de l'ébranlement. L'abscisse, z , de M est donc aussi l'abscisse de M_0 .

L'onde est caractérisée par les *deux polarisations* $\delta_x(t, z)$ et $\delta_y(t, z)$ qui représentent les composantes de $\vec{\delta}$ sur chacun des axes \vec{e}_x et \vec{e}_y . Ces quantités dépendent du point considéré (c'est à dire de l'abscisse z) et du temps t . A chaque instant, compte tenu des conditions aux limites imposées, les fonctions $\delta_x(t, z)$ et $\delta_y(t, z)$ sont nulles en $z = 0$, abscisse de A et en $z = L$, abscisse de B .

Considérons la seule polarisation $\delta_x(t, z)$. C'est la somme de deux fonctions dont chacune décrit une onde progressive : $\delta_x(t, z) = f_x(t - z/c) + g_x(t + z/c)$ où c est la célérité des ondes le long de la corde. La fonction $f_x(t - z/c)$ décrit une onde qui se

propage suivant la direction des z croissants ; la fonction $g_x(t + z/c)$ décrit une onde qui se propage en sens opposé.

L'équation de propagation s'écrit

$$\frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

où $\psi(t, z) = f(t - z/c) + g(t + z/c)$ représente indifféremment $\delta_x(t, z)$ ou $\delta_y(t, z)$. A chaque instant, t , la fonction ψ satisfait donc les conditions aux limites $\psi(t, 0) = 0$ et $\psi(t, L) = 0$.

Considérons la fonction ψ à un instant donné. On démontre la relation (c'est une propriété mathématique) :

$$\psi = \sum_n C_n u_n(z) \quad \text{avec} \quad u_n(z) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) & \text{pour } z \in [0, L] \\ 0 & \text{pour } z \notin [0, L] \end{cases} \quad (3.2)$$

n est un entier tandis que L est la longueur de la corde. La fonction ψ dépendant du temps, il en va de même des coefficients C_n .

N.B. Remarquons que le développement de ψ est similaire au développement d'un vecteur ψ sur les vecteurs de base \mathbf{u}_n .

On remplace ψ par son développement (3.2) dans l'équation (3.1). On trouve

$$F := \sum_n \left(\ddot{C}_n + \left(\frac{n c \pi}{L}\right)^2 C_n \right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, L] \quad (3.3)$$

où nous utilisons la notation $\frac{d(\cdot)}{dt} = \dot{(\cdot)}$ et $\frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = \ddot{(\cdot)}$.

Calculons l'intégrale $P_{kn} := \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right) \times \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz$. On distingue les cas $k \neq n$ et $k = n$. Il vient

$$P_{kn} = \frac{L}{2} \delta_{kn}$$

où δ_{kn} est le **symbole de Kronecker** ($\delta_{kn} = 1$ pour $k = n$ et $\delta_{kn} = 0$ pour $k \neq n$).

N.B. P_{kn} peut s'interpréter comme le produit scalaire des vecteurs \mathbf{u}_k et \mathbf{u}_n .

On en déduit

$$\int_0^L \left(\sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right) \times F \right) dz = \sum_n \left(\ddot{C}_n + \left(\frac{n c \pi}{L}\right)^2 C_n \right) \times \frac{L}{2} \delta_{kn} = \left(\ddot{C}_k + \left(\frac{k c \pi}{L}\right)^2 C_k \right) \frac{L}{2}$$

La relation $F = 0$ (cf. l'équation (3.3)) implique $0 = \left(\ddot{C}_k + \left(\frac{k c \pi}{L}\right)^2 C_k \right) \frac{L}{2}$, soit

$$C_k = A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad \text{avec} \quad \omega_k = \frac{k c \pi}{L}$$

où A_k et φ_k sont des constantes.

La fonction δ_x la plus générale est donc décrite comme une "superposition" de fonctions périodiques de la forme

$$U_n^x(z, t) := A_n \sin(\omega_n t + \varphi_k) \quad u_n(z) := A_n \sin(\omega_n t + \varphi_k) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad \text{pour } z \in [0, L]$$

La fonction $U_n^x(z, t)$ représente **un mode de vibration** de la corde.

On peut considérer que la corde entre A et B est une région de l'espace (à une dimension) susceptible de piéger l'énergie des ondes qui animent la corde. Dans ce sens c'est une cavité à une dimension. La fonction $U_n^x(t, z)$ représente un "mode" de la cavité ("mode" ou "mode propre"). La pulsation du mode, $\omega_n = \frac{n c \pi}{L}$, est une pulsation propre de la cavité, la fréquence $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$ est **une fréquence propre de la cavité**.

Les fréquences propres sont équidistantes de $\frac{c}{2L}$; le nombre de fréquences propres dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ est donc $dN_\nu = 2Ld\nu/c$. A chaque fréquence propre, ν_n , correspondent deux modes, $U_n^x(t, z)$ et $U_n^y(t, z)$. Par conséquent, le nombre de modes dont la fréquence appartient à l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ est $dN_\nu = 4Ld\nu/c$.

3.2.2 Cavité à trois dimensions

Les développements précédents se généralisent au cas des ondes électromagnétiques piégées dans une cavité à trois dimensions.

Considérons un parallélépipède rectangle dont les côtés de dimension L_1 , L_2 et L_3 sont parallèles aux trois axes orthonormés d'un repère galiléen (Figure 3-3). Ce parallélépipède, supposé vide, constitue la cavité que nous considérons. Les parois de la cavité sont des miroirs métalliques parfaitement réfléchissants. La composante tangentielle du champ électrique sur les parois de la cavité est donc nulle.

La connaissance, en chaque point \vec{r} et à chaque instant t , du champ électrique, \vec{E} , détermine le champ électromagnétique. Le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde : on dit que celle-ci est transversale.

Compte tenu des conditions aux limites, on peut définir des modes (électromagnétiques) pour la cavité. Ceux-ci sont notés $\vec{U}_{\vec{n},s}(t, \vec{r})$ où $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est un ensemble de trois indices entiers, tandis que s prend deux valeurs selon la polarisation considérée. Le champ électrique, \vec{E} , apparaît alors comme une superposition de modes :
$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \sum_s \sum_{n_1, n_2, n_3} \vec{U}_{\vec{n},s}(t, \vec{r})$$

Sans entrer dans les détails précisons que la fréquence du mode $\vec{U}_{\vec{n},s}(t, \vec{r})$ est

$$\nu_{\vec{n}} = \sqrt{\left(\frac{c n_1}{2L_1}\right)^2 + \left(\frac{c n_2}{2L_2}\right)^2 + \left(\frac{c n_3}{2L_3}\right)^2}$$

où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

Comme dans le cas de la corde vibrante, l'onde électromagnétique étant une onde transversale, à chaque fréquence propre sont associés deux modes correspondants aux deux valeurs possibles de s .

Nous souhaitons dénombrer les fréquences propres comprises entre ν et $\nu + d\nu$. Pour cela nous représentons les fréquences propres au moyen d'un diagramme dans "l'espace réciproque" (Figure 3-4). Nous considérons un repère orthonormé et nous construisons un réseau dont les noeuds, $M_{\vec{n}}$ on pour coordonnées $X_{\vec{n}} = n_1 \frac{c}{2L_1}$, $Y_{\vec{n}} = n_2 \frac{c}{2L_2}$ et $Z_{\vec{n}} = n_3 \frac{c}{2L_3}$.

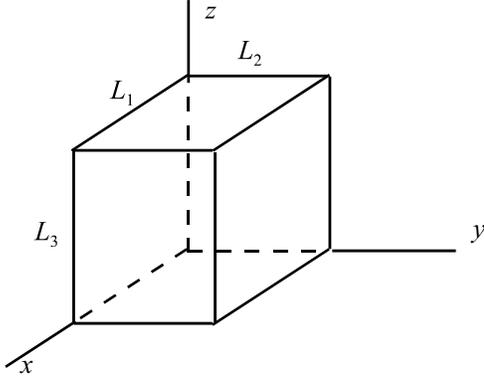


Figure 3-3.

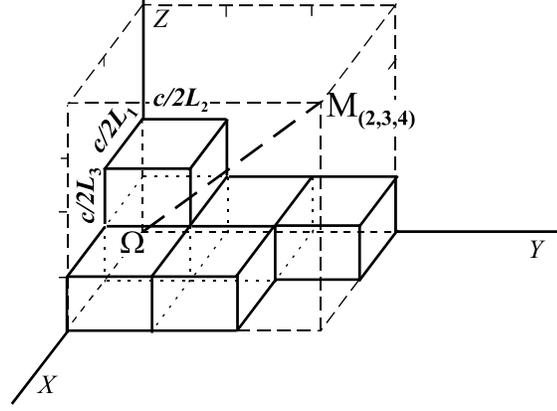


Figure 3-4.

Dans l'espace réciproque, la longueur $\Omega M_{\vec{n}}$ est la fréquence propre $\nu_{\vec{n}}$.

On vérifie qu'il y a une bijection entre les noeuds du réseau (les points $M_{\vec{n}}$) et les mailles (les parallélépipèdes de volume $\frac{1}{8} \frac{c^3}{L_1 L_2 L_3} := \mathcal{V}_e$). Par conséquent, compter les noeuds du réseau dans un volume donné, \mathcal{V}_r de l'espace réciproque c'est aussi compter le nombre de parallélépipèdes que l'on y trouve. En réalité, avec $L_1 \sim L_2 \sim L_3$, ces deux opérations sont équivalentes pour $\mathcal{V}_e \ll \mathcal{V}_r$; dans le cas contraire les effets de bords peuvent être importants.

Le nombre, N_ν , de fréquences propres inférieures à ν est donc le nombre de volume \mathcal{V}_e contenus dans le huitième de sphère de rayon $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \nu$, caractérisé par $X > 0$, $Y > 0$ et $Z > 0$:

$$N_\nu = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi \nu^3 / \mathcal{V}_e = \frac{4}{3} \pi \nu^3 \frac{L_1 L_2 L_3}{c^3}$$

Le nombre de fréquences propres comprises entre ν et $\nu + d\nu$ est donc $dN_\nu = 4\pi \nu^2 d\nu L_1 L_2 L_3 / c^3 = 4\pi \nu^2 d\nu V / c^3$ où $V = L_1 L_2 L_3$ est le volume de la cavité considérée. Nous en déduisons le nombre de modes, $d\mathcal{N}_\nu = 2dN_\nu$, dont la fréquence appartient à l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$:

$$d\mathcal{N}_\nu = \frac{8\pi \nu^2 d\nu}{c^3} \times V$$

N.B. Les effets de bords sont négligeables pour $d\nu \gg c/L_k$ (où L_k est L_1 , L_2 ou L_3).

3.3 La densité spectrale d'énergie à l'équilibre thermodynamique

Chaque mode stocke une certaine énergie, proportionnelle au carré de l'amplitude du mode. Les parois étant parfaitement réfléchissantes, il n'y a aucune déperdition d'énergie et aucun transfert d'énergie possible d'un mode vers un autre.

Introduisons dans la cavité une parcelle de corps noir dont nous maintenons constante la température T . L'énergie stockée dans un mode quelconque est absorbée tôt ou tard par le corps noir, tandis que celui-ci émet un rayonnement purement thermique qui se répartit dans les divers modes de la cavité. Après un certain temps, le rayonnement dans la cavité est le rayonnement d'équilibre thermodynamique à la température T . C'est cette situation que nous considérons.

Le calcul classique de Rayleigh et Jeans

La thermodynamique classique prétend que chaque mode est susceptible de posséder une énergie comprise entre E et $E + dE$ avec la probabilité $Ae^{-E/k_B T} dE$ où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B \simeq 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$).

La probabilité, $A \int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE$, pour que l'énergie appartienne à l'intervalle $[0, \infty]$ est égale à l'unité. On en déduit $A = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = \frac{1}{k_B T}$.

L'énergie moyenne par mode est $\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{k_B T} = k_B T$. Cette quantité est indépendante de la fréquence du mode considéré.

L'énergie moyenne portée par les modes de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est donc $\bar{E} dN_\nu$; c'est aussi $\rho(\nu, T) \times V \times d\nu$ où $\rho(\nu, T)$ est, par définition, la densité spectrale d'énergie. On en déduit

$$\rho(\nu, T) = k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

La mesure expérimentale de la densité spectrale d'énergie montre qu'une telle expression n'est pas acceptable (voir la figure 3-6). En outre, l'énergie totale contenue dans le volume V serait $W = V \times \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu k_B T = \infty$, ce qui contredit l'observation courante.

Le calcul de Planck

L'idée développée par Planck, consiste à admettre que l'énergie dans un mode[†] de fréquence propre égale à ν , est un multiple entier de $h_P \nu$, soit $n h_P \nu$, avec une probabilité $Ae^{-n h_P \nu / k_B T}$. De nos jours, la constante, h_P , introduite est appelée "**constante de Planck**"; sa valeur est $h_P \simeq 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

La somme des probabilités est égale à l'unité; on en déduit

$$A = \frac{1}{\sum_n e^{-n h_P \nu / k_B T}} = 1 - e^{-h_P \nu / k_B T}.$$

L'énergie moyenne dans le mode de fréquence ν est donc $\bar{E}_\nu = (1 - e^{-h_P \nu / k_B T}) \sum_n n h_P \nu e^{-n h_P \nu / k_B T}$.

Tous calculs faits[‡], il vient

$$\bar{E}_\nu = \frac{h_P \nu}{e^{h_P \nu / k_B T} - 1}$$

Cette expression s'interprète de la façon suivante : $h_P \nu$ est un quantum d'énergie tandis que $\bar{n} = \frac{1}{e^{h_P \nu / k_B T} - 1}$ est le nombre moyen de quanta par mode à l'équilibre thermodynamique. Remarquons que l'énergie moyenne, \bar{E}_ν , est fonction de la fréquence et que \bar{E}_ν décroît vers zéro lorsque la fréquence tend vers l'infini.

[†]En réalité l'hypothèse portait sur les échanges d'énergie qui ne pouvaient s'effectuer que par nombres entiers de "quanta" $h_P \nu$.

[‡]On utilise la relation $\sum_{n=1}^\infty e^{-nX} = \frac{1}{1 - e^{-X}}$ pour $X = h_P \nu / k_B T > 0$ (somme d'une série géométrique) ainsi que $\sum n e^{-nX} = -\frac{d}{dX} \sum e^{-nX} = \frac{e^{-X}}{(1 - e^{-X})^2}$.

Dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$ l'énergie moyenne est donc $\bar{E}_\nu \times dN_\nu$; on en déduit l'expression de la densité spectrale d'énergie

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h_P\nu}{e^{h_P\nu/k_B T} - 1} \quad (3.4)$$

Cette formule est "**la formule de Planck**" qui est en complet accord avec les observations.

Dans le résultat final les propriétés géométriques de la cavité n'interviennent pas. Celle-ci peut même être de dimension infinie. Les erreurs dues à l'approximation $d\nu \gg c/L_k$ disparaissent et l'expression (3.4) donne la densité spectrale d'énergie au voisinage d'un corps noir dans l'espace libre (considéré comme une cavité de dimensions infinies). On en déduit l'énergie dW du rayonnement d'équilibre thermodynamique, contenu dans un volume élémentaire dV , dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$, sous la forme

$$dW = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \times \frac{h_P\nu}{e^{h_P\nu/k_B T} - 1} \times dV$$

Se reporter à la figure 3-5 pour l'interprétation des divers termes dans l'expression de dW .

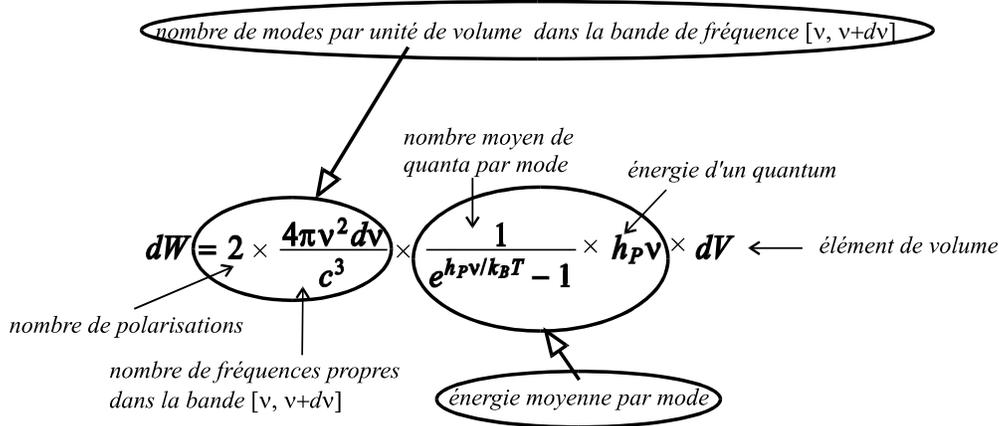


Figure 3-5.

Discussion des résultats

La densité totale d'énergie s'obtient aisément : $u = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu$. En posant $x = \frac{h_P\nu}{k_B T}$, on obtient **la loi de Stefan** sous la forme

$$u = a \times T^4 \quad \text{avec} \quad a = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h_P^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

On peut écrire l'expression de la densité spectrale d'énergie de telle sorte que **la loi de Wien** soit manifeste :

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi k_B^3 T^3}{c^3 h_P^2} \times \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \text{avec} \quad x = \frac{h_P\nu}{k_B T}$$

Nous représentons la fonction $x = \frac{h_P \nu}{k_B T} \mapsto \rho$ ci-dessous (figure 3-6).

La température, T , étant donnée, le maximum de ρ est obtenu pour la valeur de x correspondant au maximum de $\frac{x^3}{e^x - 1}$. C'est-à-dire pour $x \simeq 2,821\dots$ soit encore pour $\nu = \nu_m = b T$ avec $b = 2,821\dots \times \frac{k_B}{h_P}$.

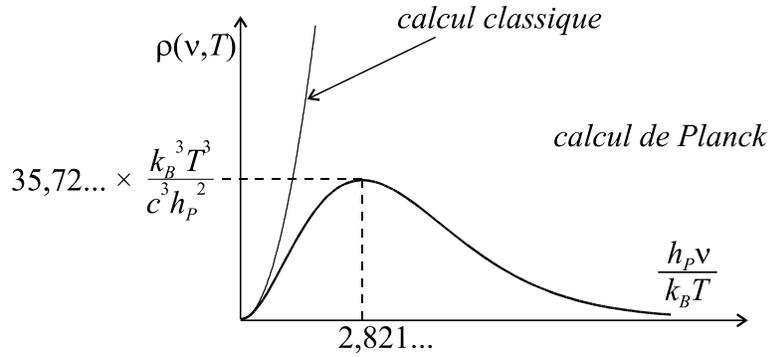


Figure 3-6.

Remarquons que la loi classique est satisfaisante lorsque la fréquence considérée correspond à un quantum d'énergie petit devant $k_B T$ (c'est-à-dire $h_P \nu \ll k_B T$).

Sur la figure 3-7 nous représentons la densité spectrale d'énergie du corps noir à diverses températures, en fonction de la fréquence et non plus de $\frac{h_P \nu}{k_B T}$. Toutes les informations contenues dans la figure 3-7 sont déjà contenues dans la figure 3-6 ; cependant cette nouvelle présentation permet de visualiser certaines propriétés plus clairement (par exemple le fait que ν_m croisse avec T).

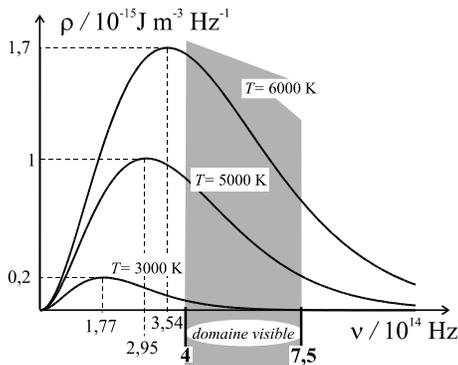


Figure 3-7.

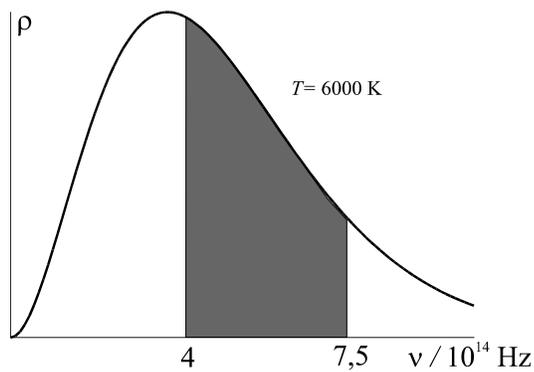


Figure 3-8.

Sur les figures 3-7 et 3-8 le domaine visible ($4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < \nu < 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$) a été mis en évidence. La figure 3-8 représente la densité spectrale d'énergie d'un corps noir à la température 6000 K (c'est à peu près la température de surface du Soleil). La proportion d'énergie électromagnétique dans le domaine visible est supérieure à 40% : c'est le rapport

de l'aire de la surface grise à l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des x . A la température de 1000 K (soit $1000 - 273,15 \sim 700^\circ\text{C}$), la proportion d'énergie dans le domaine visible reste inférieure à $7 \cdot 10^{-6}$. Le corps noir est de plus en plus sombre au fur et à mesure que la température décroît. Il est pratiquement noir à la température ordinaire. Sa couleur change aussi car le rayonnement rouge ($\nu \sim \nu_r = 4 \cdot 10^{14}$ Hz) devient très largement prépondérant devant le rayonnement bleu ($\nu \sim \nu_b = 7,5 \cdot 10^{14}$ Hz). On peut s'en convaincre en étudiant l'évolution, en fonction de la température T , du rapport des densités spectrales d'énergie $\rho(\nu_r, T) / \rho(\nu_b, T)$. De façon qualitative, il suffit de remarquer que le Soleil est jaune pâle tandis qu'un feu de cheminée est rouge.

3.4 Les conséquences du calcul de Planck

Les conséquences du calcul de Planck furent immédiates et importantes.

- Un raisonnement semblable à celui de Planck, appliqué à la chaleur massique des solides, permit à Einstein d'interpréter la loi de Dulong et Petit selon laquelle le produit de la chaleur massique, c , d'un corps pur par sa masse atomique, A , est une constante. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs du produit $A c$ dans les conditions normales.

corps	P	S	I	Fe	Cu	Pt	Zn
$A c / \text{JK}^{-1}$	24,7	23,8	28,4	25,8	24,5	26,1	25,5

Considérons un corps simple[†] solide. Chaque atome du solide est considéré comme un oscillateur harmonique de fréquence ν , caractéristique du solide considéré.

Admettons que l'énergie de chacun de ces oscillateurs est quantifiée. Le calcul de Planck fournit l'énergie d'une mole à la température T : $W = 3 \times N_{\text{Av}} \frac{h_P \nu}{e^{h_P \nu / k_B T} - 1}$ où N_{Av} est le nombre d'Avogadro (le nombre d'atomes constituant une mole), tandis que les trois degrés de liberté d'oscillation suivant les 3 axes Ox , Oy et Oz d'un repère orthonormé sont considérés comme trois polarisations possibles.

La chaleur spécifique d'une mole est $\frac{dW}{dT} = 3N_{\text{Av}} \times \frac{(h_P \nu)^2}{k_B T^2} \times \frac{e^{h_P \nu / k_B T}}{(e^{h_P \nu / k_B T} - 1)^2}$.

La limite classique est obtenue lorsque le quantum d'énergie est petit à l'échelle des énergies thermique ($h_P \nu \ll k_B T$). Dans ces conditions il vient

$$e^{h_P \nu / k_B T} \simeq 1 + h_P \nu / k_B T + \dots \quad \text{On en déduit } \frac{dW}{dT} = 3N_{\text{Av}} k_B.$$

La chaleur massique du corps est la chaleur spécifique de l'unité de masse, soit $c = 3N_{\text{Av}} \frac{k_B}{A}$ où A est la masse molaire du corps considéré. En introduisant la constante des gaz parfaits $R = N_{\text{Av}} k_B \simeq 8,3 \text{ JK}^{-1}$ il vient

$$A c = 3R \simeq 25 \text{ JK}^{-1}$$

Certains corps comme le carbone ne suivent pas la loi de Dulong et Petit, cependant on peut vérifier que $A c$ se rapproche de la valeur théorique lorsque T croît (c'est-à-dire quand $h_P \nu / k_B T$ décroît et que l'approximation classique devient plus pertinente). Le modèle d'Einstein permet de retrouver la loi de Dulong et Petit, celle-ci doit cependant être considérée comme une loi approximative, grossièrement vérifiée car les valeurs réelles de $A c$ s'éloignent sensiblement de la valeur théorique $3R \simeq 25 \text{ JK}^{-1}$. Compte tenu de la simplicité du modèle ce n'est pas très surprenant. Debye obtient une meilleure estimation de la chaleur massique des solides en considérant un solide comme une cavité

[†]Un corps simple est formé d'une seule espèce d'atomes.

susceptible d'accueillir des ondes élastiques (longitudinales et transversales) dont l'énergie est quantifiée.

- La quantification de l'énergie d'un oscillateur harmonique peut se mettre sous une forme généralisable à tout mouvement périodique.

Considérons le mouvement d'un oscillateur de masse m , de raideur $k = m\omega^2$ dont l'élongation est $x = a \sin \omega t$. La période du mouvement est $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

L'énergie de l'oscillateur est la somme de l'énergie potentielle élastique du ressort, $E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$ et de l'énergie cinétique de la masse, $E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$. On vérifie l'égalité des valeurs moyennes $\langle E_{pot} \rangle$ et $\langle E_{cin} \rangle$:

$$\langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kx^2 dt = \frac{1}{4}ka^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}mv^2 dt = \langle E_{cin} \rangle$$

L'énergie de l'oscillateur est une constante dont la valeur est donc $2\langle E_{cin} \rangle$. La condition de quantification s'écrit :

$$\langle E \rangle = nh_P \nu = \langle E_{pot} \rangle + \langle E_{cin} \rangle = 2\langle E_{cin} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T mv^2 dt \text{ avec } \nu T = 1.$$

En posant $mv = p$ (impulsion de la masse oscillante) il vient $\int_0^T p v dt = nh_P$. Nous posons $\vec{v} dt = d\vec{r}$ où $d\vec{r}$ est le déplacement de la masse m pendant le temps dt . Nous remarquons que $p v dt$ s'écrit encore $\vec{p} \cdot d\vec{r}$. En considérant \vec{p} comme une fonction de la position \vec{r} , il vient

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = n h_P \quad (3.5)$$

Le symbole \oint signifie que l'intégration a été effectuée sur une période complète du mouvement considéré. La relation (3.5), étendue à tous mouvements périodiques, est une relation qui fonde l'*ancienne théorie des quanta*. Elle apparaît comme une règle de sélection qui permet de distinguer, parmi les mouvements classiques, ceux que la nature privilégie pour être les seuls mouvements réellement possibles.

- Nous pouvons appliquer cette règle au mouvement circulaire uniforme. Il vient $\vec{p} = mv\vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur tangent unitaire à la trajectoire. La vitesse v est une constante. Le déplacement élémentaire est $d\vec{r} = dl\vec{u}$. On en déduit $\vec{p} \cdot d\vec{r} = mvd l$ et $\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = mv \times 2\pi r = n h_P$.

Le module du moment cinétique est $L = mvr$. On déduit de ce qui précède la relation

$$L = n \hbar \quad (3.6)$$

où n est un entier tandis que $\hbar = \frac{h_P}{2\pi} \simeq 1,05 \times 10^{-34}$ J.s..

L'atome de Bohr fut construit sur ce modèle dès 1913. Il fallut cependant attendre la naissance de la mécanique ondulatoire avec la thèse de Louis de Broglie en 1924 pour comprendre la signification de cette règle mystérieuse

3.5 Conclusion

L'introduction d'un quantum pour décrire les échanges d'énergie et le succès du calcul de Planck changea radicalement les conceptions en physique en permettant l'émergence de l'ancienne théorie des quanta.

En 1905, Einstein montra que l'effet photoélectrique s'interprétait naturellement, en supposant la quantification de l'énergie des ondes électromagnétiques elle-même. Il introduisit alors le concept de "photon"[†]. En 1923, Compton montra que les photons transportent une certaine quantité de mouvement. La nature corpusculaire du rayonnement était alors démontrée. Il restait à Louis de Broglie, dans sa thèse de 1924, de suggérer que les corpuscules, les électrons par exemple, présentaient un aspect ondulatoire pour que soit achevée l'esquisse d'un monde nouveau dont l'exploration, encore inachevée, occupa l'ensemble du siècle dernier.

[†]Einstein introduit le concept de photon mais il n'introduit pas le mot "photon" qui apparaît vers 1926.