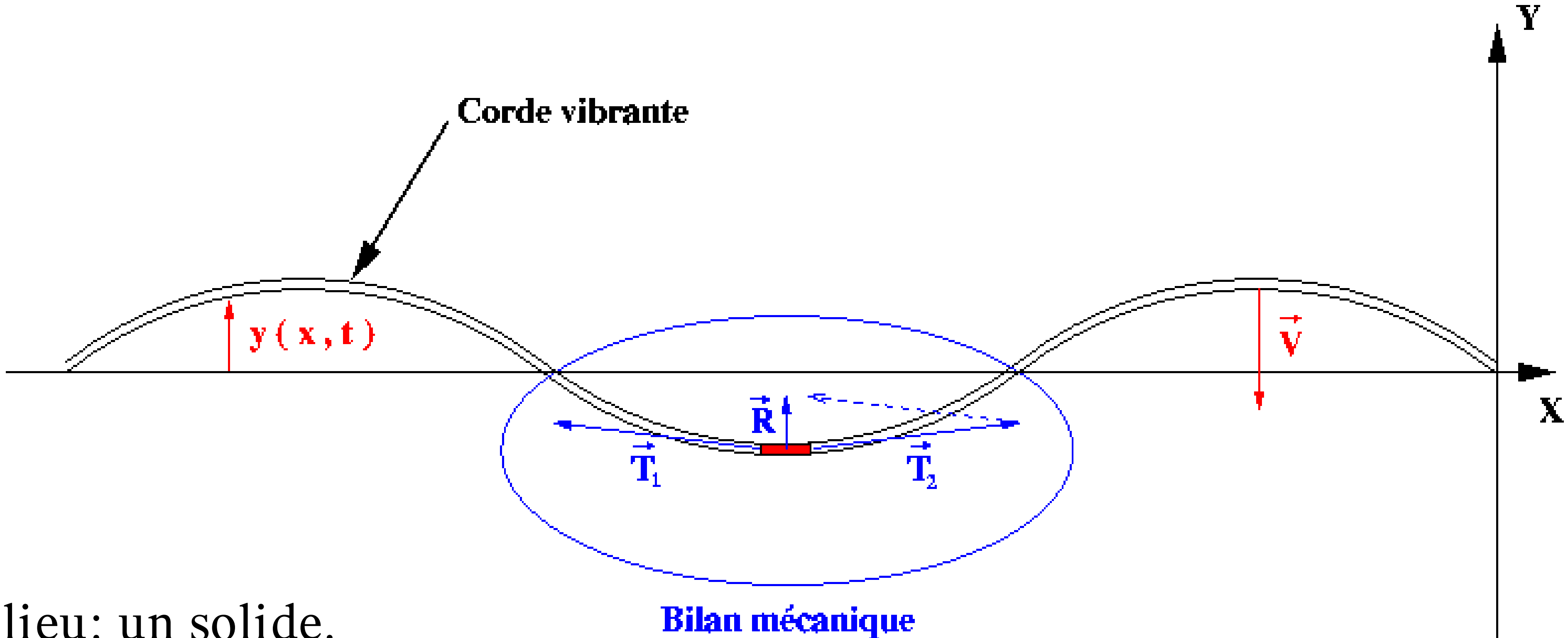
Introduction aux ondes: nature et propriétés

PCB 2 nd semestre

Exemples d'ondes

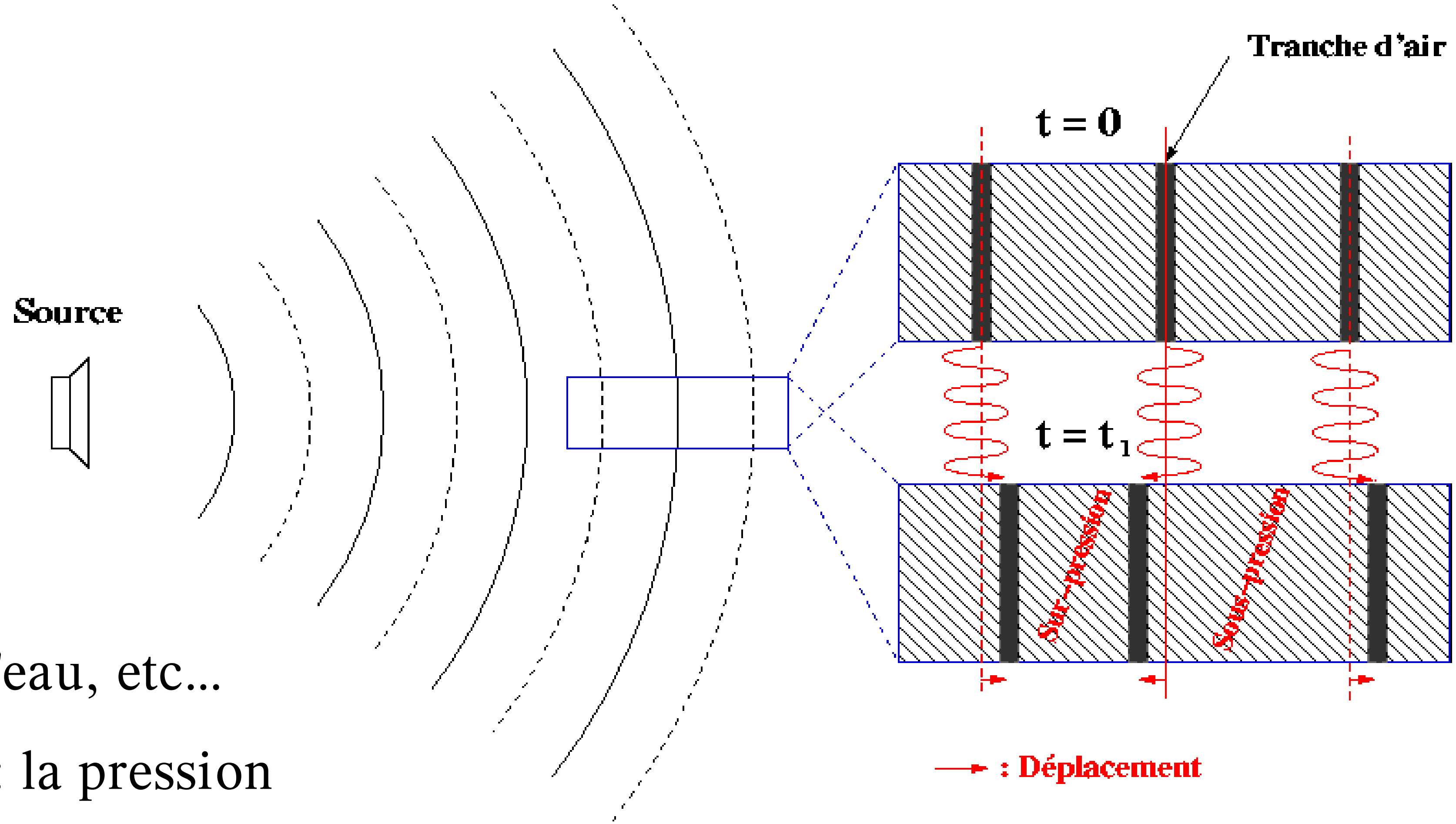
- **Cordes vibrantes**: onde de déplacement.
- **Le son**: onde de pression.
- **Le pouls**: onde élastique.
- **Les vagues**: onde de gravité.
- **La lumière**: onde électromagnétique.

Cordes vibrantes



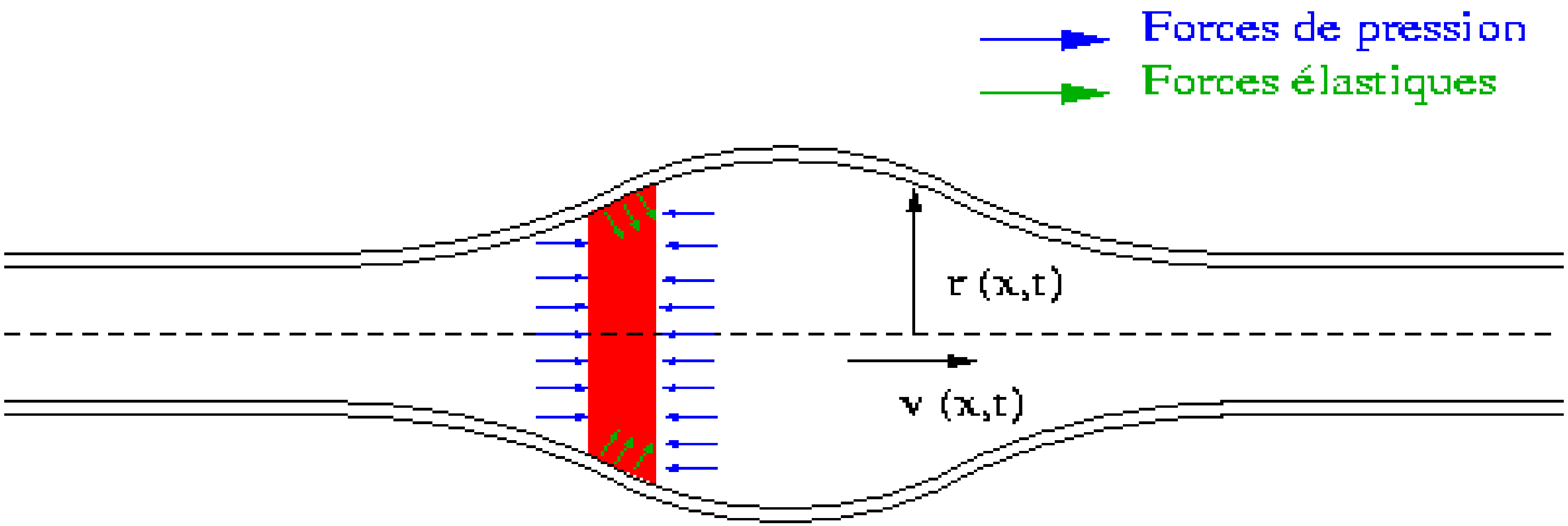
- Milieu: un solide.
- Force motrice: la tension.
- Source: mécanique (opérateur)

Le son: ondes acoustiques

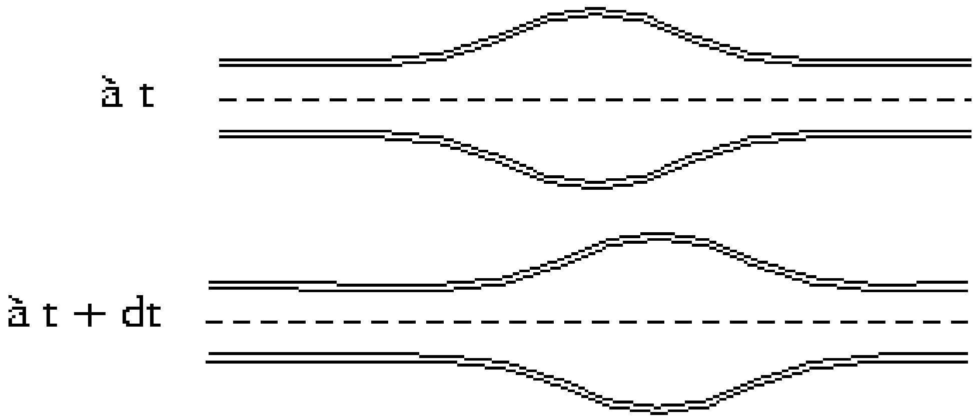


- Milieu: l'air, l'eau, etc...
- Force motrice: la pression
- Source: vibration mécanique

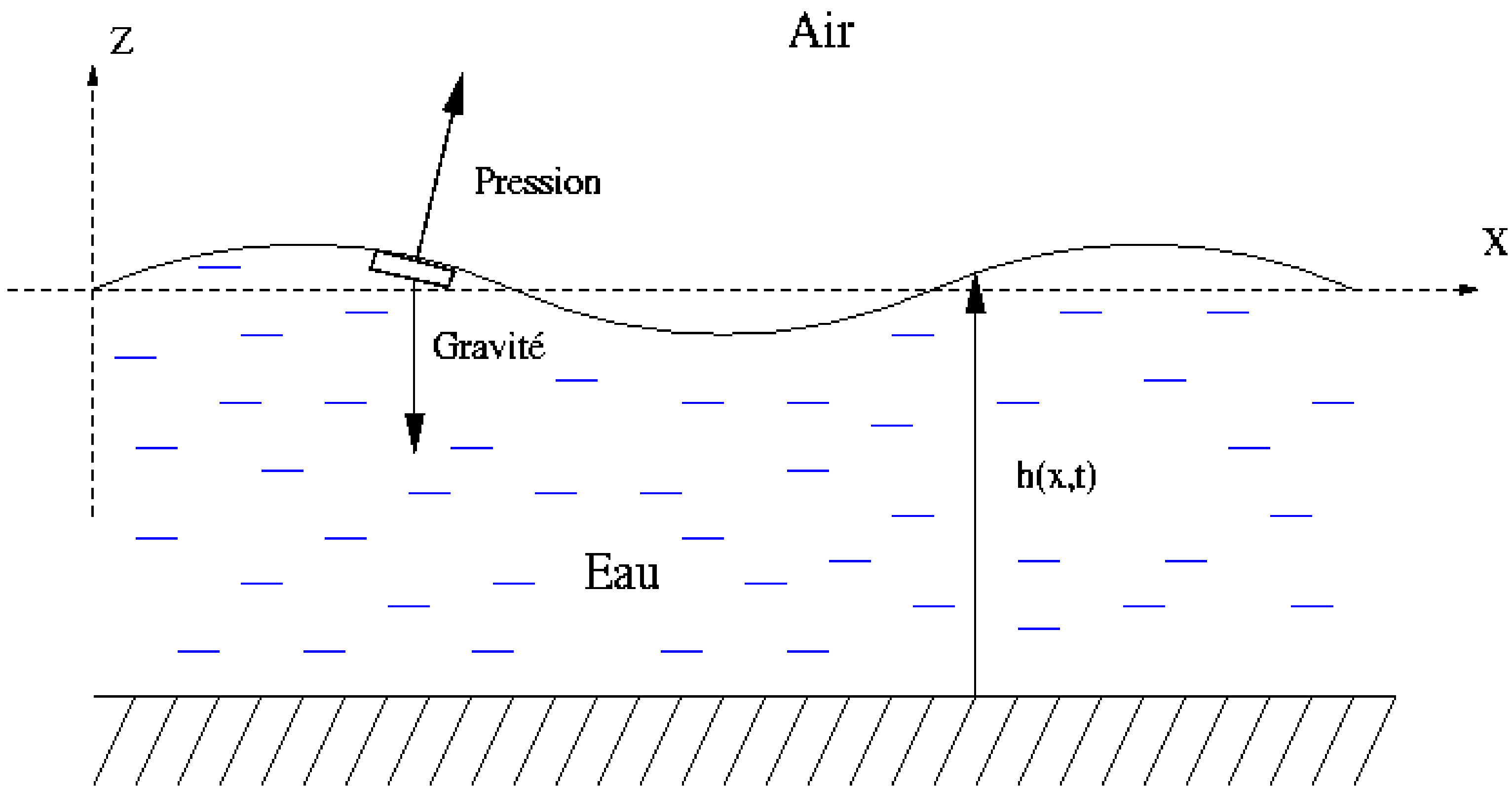
Le pouls: onde élastique



- Milieu: La paroi artérielle / le sang
- Force motrice: élasticité / la pression
- Source: Le cœur



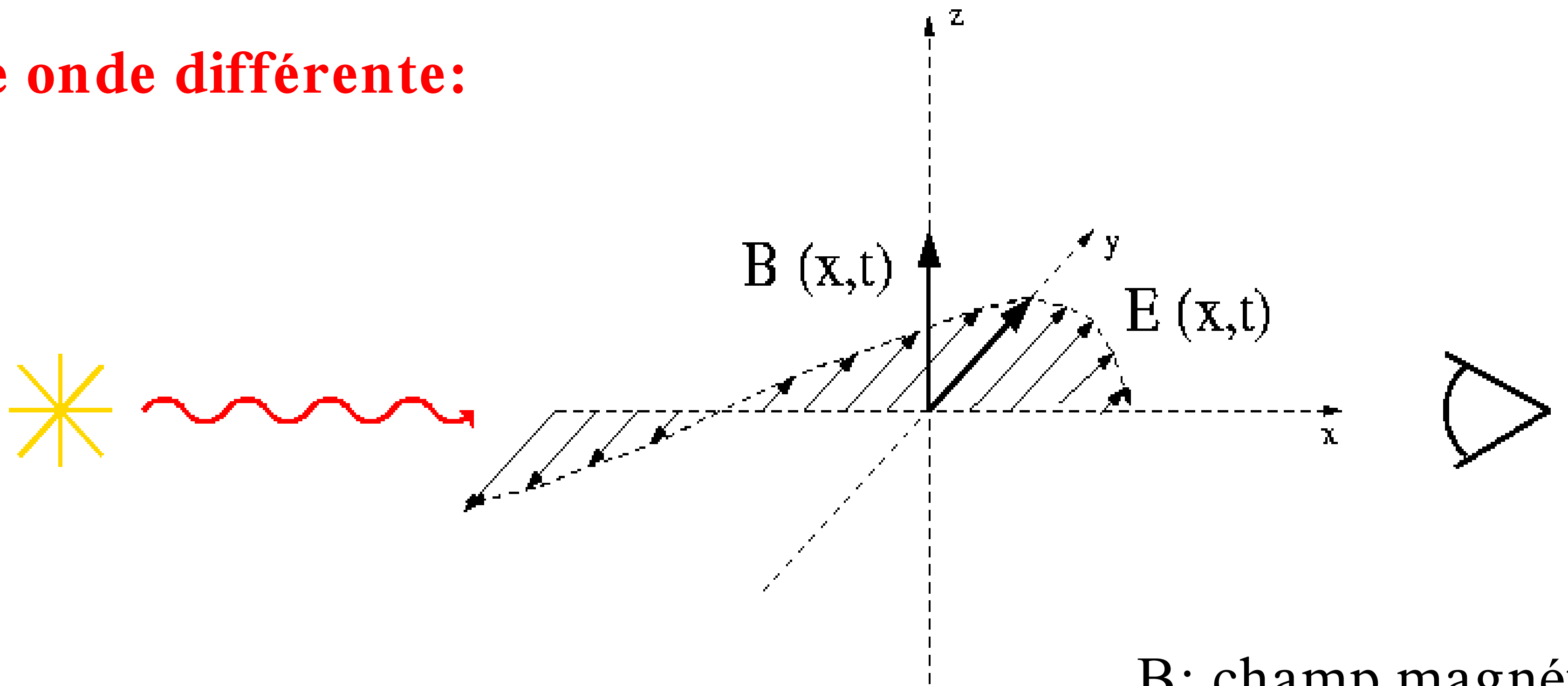
Les vagues: ondes de gravité



- Milieu: l'eau
- Force motrice: gravité/pression
- Source: ... le vent!

La lumière: onde électromagnétique

Une onde différente:



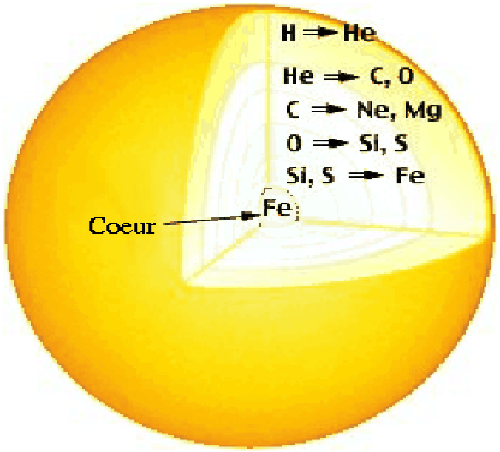
B: champ magnétique

E: champ électrique

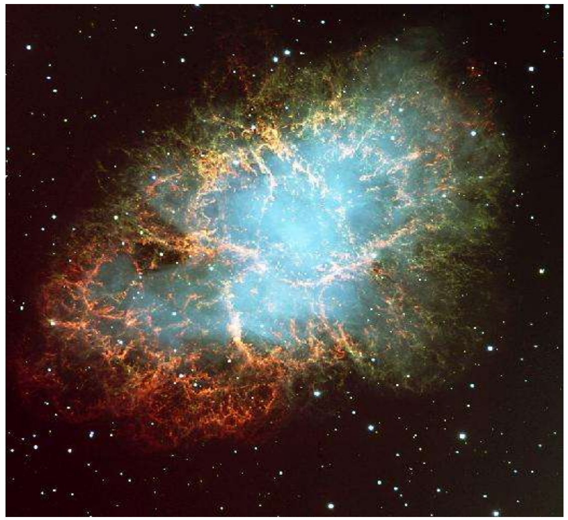
- Milieu: Le vide!
- Force motrice: ...
- Source: étoile, éclair, corps chaud (lampe),...

Explosion d'une supernovæ: Onde de choc

1 à 10 millions d'années après leurs naissances, les étoiles massives (> 8 masses solaires) explosent en supernovae.



→ Effondrement gravitationnel du cœur → Rebond → Onde de choc sur-puissante. (Lumière + matière)



Nébuleuse du crabe.

Une onde de choc présente un « front »: zone étroite où une grandeur physique varie très fortement.

Autre exemple d'onde de choc: le « bang » du mur du son.

Equation d'onde

Une onde peut être décrite par f (x,t), fonction de 2 variables.

Notation:

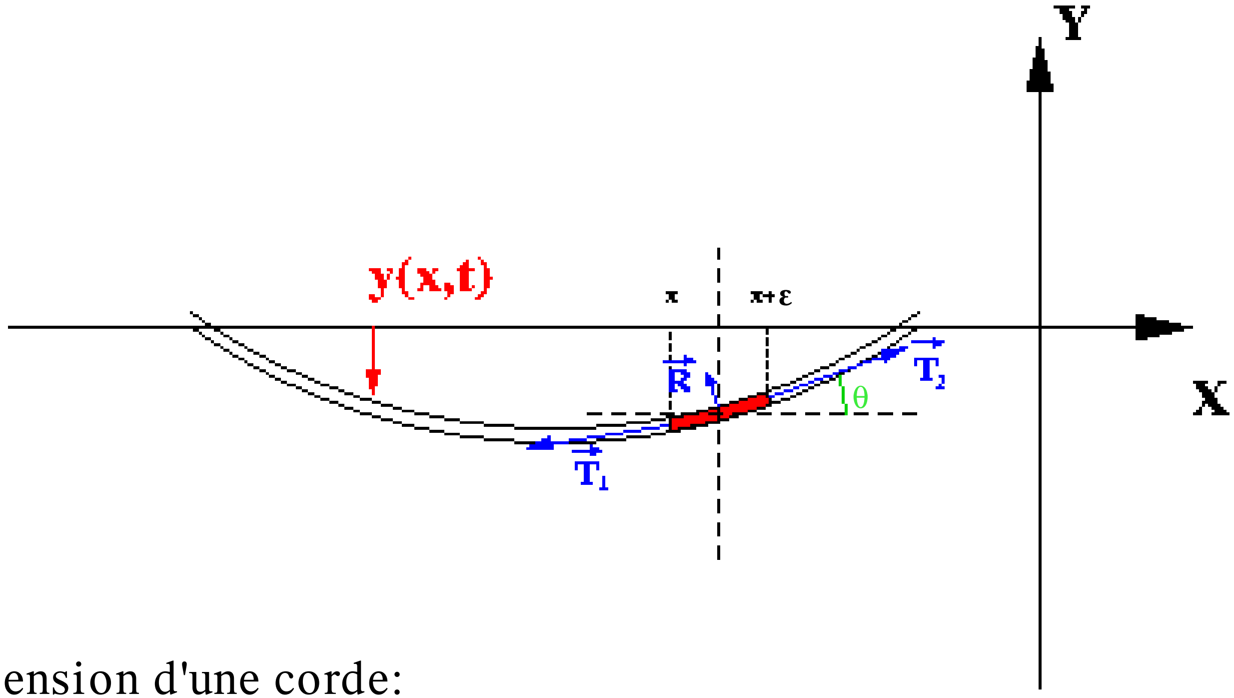
- $\frac{\partial f}{\partial x}$: dérivée de f comme fonction de x, uniquement.
- $\frac{\partial f}{\partial t}$: dérivée de f comme fonction de t, uniquement.

Une équation d'onde (équation différentielle) peut souvent s'écrire:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, dérivée seconde par rapport a x)

Exemple d'une corde vibrante.



Tension d'une corde:

- Force de module constant (indépendant du point de la corde)
- Force tangente à la corde

On néglige la gravité.

Résultante des forces: $\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

Rappels Mathématiques

Si $\theta << 1$:

$\tan(\theta) \sim \theta$

$\cos(\theta) \sim 1$

$\sin(\theta) \sim \theta$

Dérivée:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Exemple d'une corde vibrante.

Relation géométrique:

$$\tan(\theta)=\frac{y(x+\varepsilon,t)-y(x,t)}{x+\varepsilon-x} \qquad \varepsilon \ll 1$$

Donc:

$$\theta(x,t)=\frac{\partial y}{\partial x}$$

On applique la RDF sur l'axe y:

$$dm\ a_y = R\cos(\theta) \simeq R$$

$$\begin{aligned} R &= T(\sin(\theta(x+\varepsilon,t))-\sin(\theta(x,t))) \\ &= T\frac{\theta(x+\varepsilon,t)-\theta(x,t)}{\varepsilon}\varepsilon \\ &= T\frac{\partial\theta}{\partial x}\varepsilon \end{aligned}$$

$$\lambda\varepsilon\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial\theta}{\partial x}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\lambda}{T}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0}$$

Rappels physiques

Relation fondamentale de la dynamique:

$$m\vec{a}=\sum \vec{F}$$

en projection sur les axes:

$$m\,a_x=\sum F_x$$
$$m\,a_y=\sum F_y$$
$$m\,a_z=\sum F_z$$

Ondes progressives

On recherche un type particulier de solutions de l'équation d'onde:

$$f(x \pm ct) \qquad (1)$$

Si on reporte dans l'équation d'onde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f' \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \pm c f' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$f'' - \frac{1}{c^2} c^2 f'' = 0$$

$$0 = 0$$

Donc **toute fonction** du type (1) est **solution** de l'équation d'onde. Elle décrit une **onde progressive**.

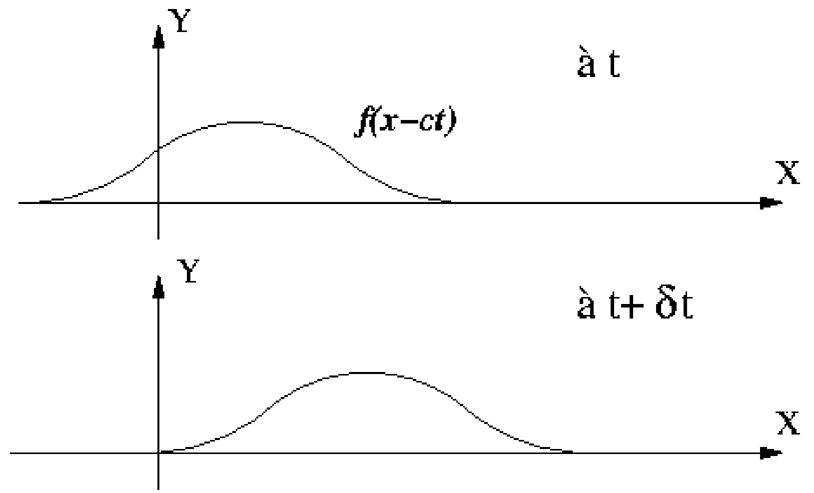
En fait toutes les solutions peuvent s'écrire:

$$f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct)$$

Rappels mathématiques

Dérivée partielle composées:

$$\frac{\partial f(u[x,t])}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial f(u)}{\partial u}$$



Direction et vitesse de propagation.

Nous avons étudié le cas des ondes plane, $f(x,t)$, où x est une coordonnée cartésienne.

Localement les ondes de géométrie plus complexes (
(Voir l'exemple des ondes sonores en introduction)

Le vecteur $\vec{u}_x$ définit la direction de propagation de l'
constante dans un plan perpendiculaire à $\vec{u}_x$.

Le paramètre c correspond à la vitesse de propagation de l'onde. En effet, le signal est translaté de δx au bout de δt si:

$$f(x+\delta x,t)=f(x,t-\delta t)$$

Pour un onde progressive, cette relation est vérifiée si:

$$\delta x=c\,\delta t$$

c correspond donc à la vitesse de l'onde.

Ordres de grandeur pour les vitesses de propagations:

- Son: 331.5 m s^{-1}
- Vagues: ~ 7 m s^{-1} (5 m de fond)
- Lumière: 3 10^8 m s^{-1}
- Pouls: 10-15 m s^{-1}

Ondes longitudinales
Ondes transversales

Les ondes mécaniques se séparent en deux catégories:

- Ondes longitudinales: déplacement dans la direction de propagation.
  - Le son
  - Les ondes de choc mécaniques
- Ondes transversales: déplacement perpendiculaire à la direction de propagation.
  - La corde vibrante
  - Les vagues
  - Le pouls (pour la paroi artérielle.)

Les ondes électromagnétiques sont transversales. Elles peuvent avoir une composante longitudinale, mais celle-ci est amortie.

Ondes sinusoïdales

Les ondes sinusoïdales sont des solutions particulièrement intéressantes de l'équation d'onde. Ce sont des ondes progressives.

$$f(x,t) = f_0 \sin(k(x \pm ct) + \phi) = \boxed{f_0 \sin(kx \pm \omega t + \phi)}$$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

k est appelé nombre d'onde. ω est appelé pulsation. On peut les relier à la longueur d'onde λ, à la fréquence υ et à la période T:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Toute onde peut être décrite comme une somme discrète (Σ_{k_i}, signal périodique) ou continue ($\int dk$, signal non périodique) d'ondes sinusoïdales.

Ondes stationnaires

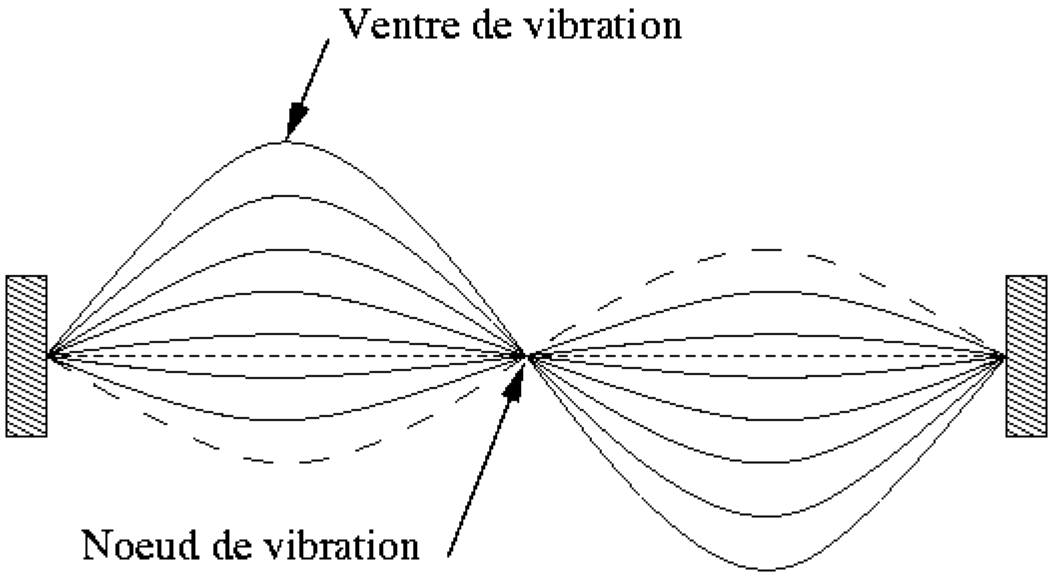
Les ondes «stationnaires» apparaissent par réflexion sur des bords.

Elle sont la somme de d'ondes progressives se propageant en directions opposées. Par exemple, pour le cas le plus simple:

$$f(x,t) = A\cos(kx+\omega t) + A\cos(kx-\omega t)$$

$$= 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Les modes propres d'une cavité sont les ondes stationnaires qui peuvent s'établir dans la cavité (sonores, lumineuses, etc...).

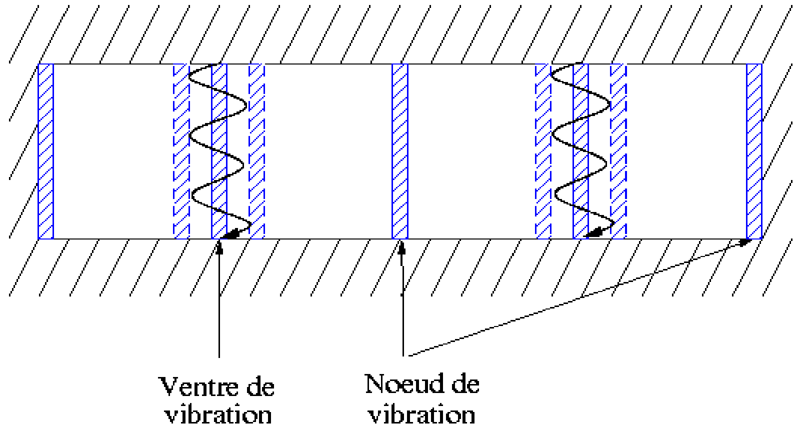


Exemples:
- Corde de violoncelle.
- Plaque de Chladny.
- Cuve en bronze + eau.

Modes propres d'une cavité

On décrit une onde sonore dans une cavité par deux ondes progressives sinusoïdales de direction opposées:

$$\xi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\cos(kx+\omega t+\phi)$$



ξ est le déplacement d'une tranche d'air. Les conditions sur les parois imposent:

$$\xi(0,t)=0 \quad (1)$$
$$\xi(L,t)=0 \quad (2)$$

(1) donne: $A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\phi)=0$

$$\Rightarrow \left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right) \quad B\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \phi=0$$

$$\Rightarrow (t=0) \quad A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-A$$

(2) donne:

$$\sin(kL)=0 \quad \Rightarrow \quad k_n=\frac{2\pi n}{L}$$

Donc, on obtient la forme d'un mode propre:

$$\xi(x,t)=A\sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

Résonances

Excitation:

- Une perturbation est imposée au système, par exemple, sous forme de condition de bord:

$$\xi(0,t)=f(t)$$

  (déplacement d'une parois pour une cavité)
- Quelque soit *f(t)* il peut s'écrire comme une somme discrète ou continue de $f_\omega \sin(\omega t)$. Donc pour un *f(t)* générique:
  - Les $\omega = \omega_i$ excitent les modes propres, qui persistent.
  - Les $\omega \neq \omega_i$ excitent des ondes qui s'atténuent.

Les fréquences des modes propres sont également les fréquences de résonance du système. Exemple de phénomènes de résonance:

- Le verre et la cantatrice.
- Le pont et la troupe de bidasses.
- L'archet et la corde de violoncelle.

Transport d'énergie

Les ondes transportent de l'énergie mais pas de matière!

Le son ne crée pas de vent, le bouchon du pêcheur reste immobile dans les vagues.

Exemples de transport d'énergie:

- Soin des calculs rénaux par ultrasons.
- Lasers (ex: opération de la myopie)
- Fours solaires. Panneaux solaires.

Exercice:

Lors de son pic de luminosité une supernovae est 3.5 10^9 plus brillante que le soleil. On suppose que la SN est située à 3 années-lumière de la terre. La distance terre-soleil est 150 10^6 km. Comparer l'énergie reçue de la SN à celle reçue du soleil.

Définitions

•Densité d'énergie:

Energie par unité de volume :

$$\rho_\epsilon(\vec{x})$$

•Flux d'énergie: $\vec{J}(x,t)$

$\vec{J}.\vec{n}\, dS dt$ est la quantité d'énergie traversant la surface dS de normale $\vec{n}$, pendant la durée dt.

Cas des ondes électromagnétiques:

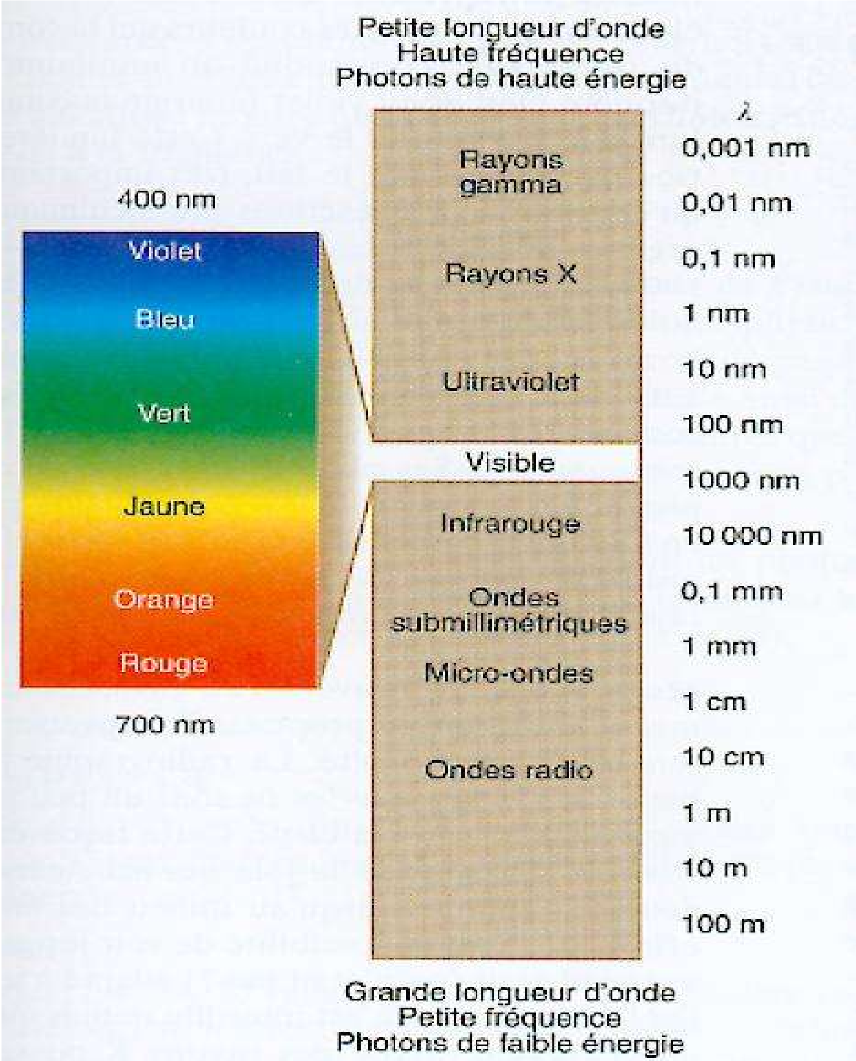
$$\rho_\epsilon(\vec{x},t)=\frac{\epsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \vec{J}(\vec{x},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

Le spectre électromagnétique.

L'œil humain ne perçoit qu'une petite fraction du spectre électromagnétique.

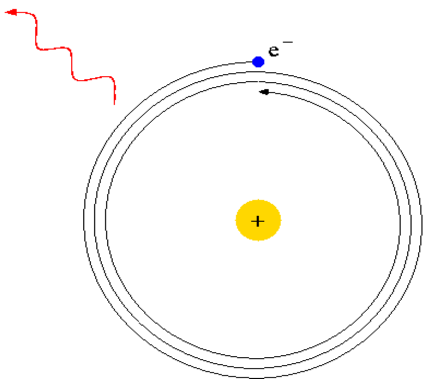
Emission de radiation dans l'univers:

- **Rayons gamma**: Supernovae, Trou noir
- **Rayons X**: Fusion d'étoiles à neutron
- **UV**: Etoiles jeunes et massives
- **Visible**: Toutes les étoiles.
- **IR**: Poussière interstellaire.
- **Ondes millimétriques**: Molécules.
- **Ondes kilométriques**:



Mécanisme d'émission de la lumière.

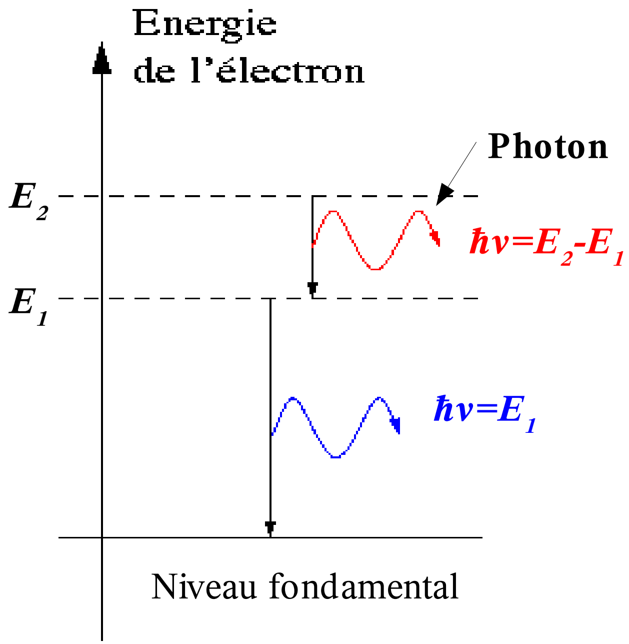
Point de vue ondulatoire (classique):



- L'électron tourne autour du noyau.
- Cela produit un champ électromagnétique oscillant dipolaire.
- L'énergie emporté par l'onde est prise à l'énergie orbitale de l'électron.

Problème: l'électron tombe sur le noyau!

Point de vue corpusculaire (quantique):

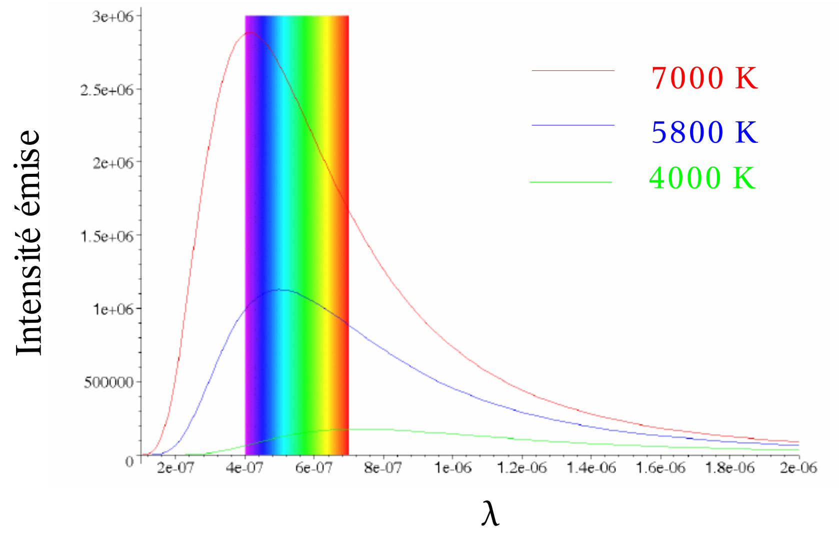


Le photon porte une quantité d'énergie déterminée. La longueur d'onde perçue est fonction de cette énergie.

Une radiation émise n'est jamais totalement monochromatique: elle dure un temps fini, et provient de multiples atomes! On l'appelle **train d'onde**. Sa longueur dépend de la source (soleil 6 µm, laser 30 cm).

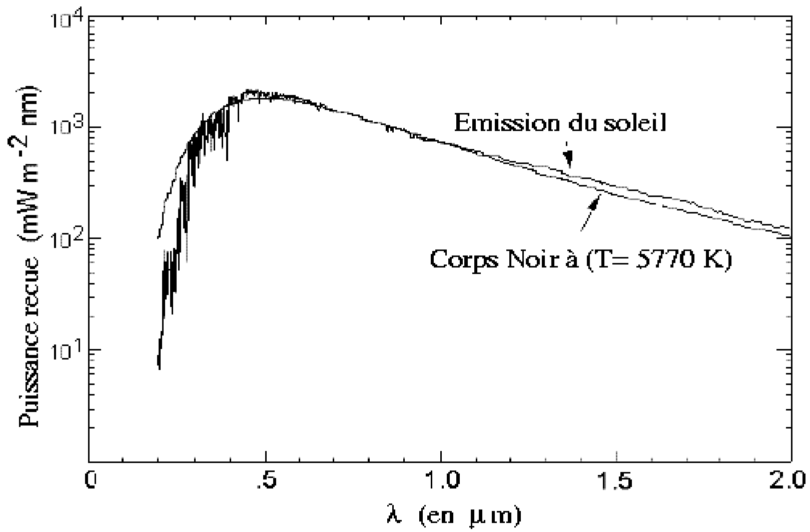
Le rayonnement du corps "*noir*"

Tout les corps (T ≠ 0) émettent de la lumière. On décrit cette émission par $I_\varepsilon(\lambda)$ l'intensité émise par intervalle de longueur d'onde et par unité de temps. ($I_\varepsilon(\lambda) d\lambda\ dt$ est une énergie)



Définition d'un "corps noir":

- Un corps qui absorbe totalement toute lumière incidente.



Propriétés d'un corps noir:

- L'émission lumineuse est universelle: $I_\varepsilon(\lambda)$ ne dépend que de T.
- L'énergie émise totale par unité de temps est proportionnelle à T^4 (loi de Stéphan)
- $I_\varepsilon(\lambda)$ obéit à la **loi de Planck** (voir figure). La loi de Planck ne peut s'expliquer qu'avec une lumière corpusculaire.

Polarisation de la lumière

Polarisation elliptique (cas général):

- Le champ $\vec{E}$ au point (x,y,z) décrit une ellipse.
- Le champ $\vec{B}$ reste perpendiculaire à $\vec{E}$. Il décrit aussi une ellipse.

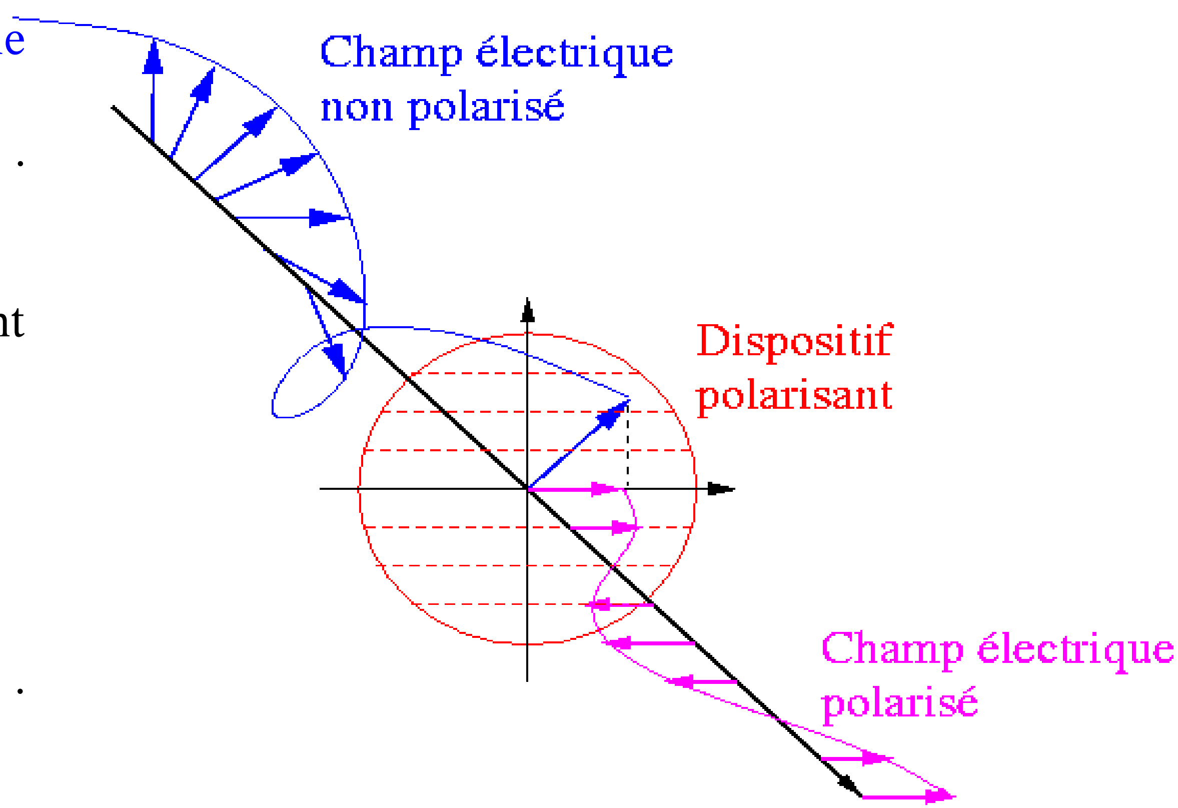
Certains processus, dits polarisant, font disparaître une composante du vecteur.

Polarisation linéaire:

- Le champ $\vec{E}$ au point (x,y,z) décrit un segment de droite.
- Le champ $\vec{B}$ reste perpendiculaire à $\vec{E}$. Il décrit aussi un segment de droite.

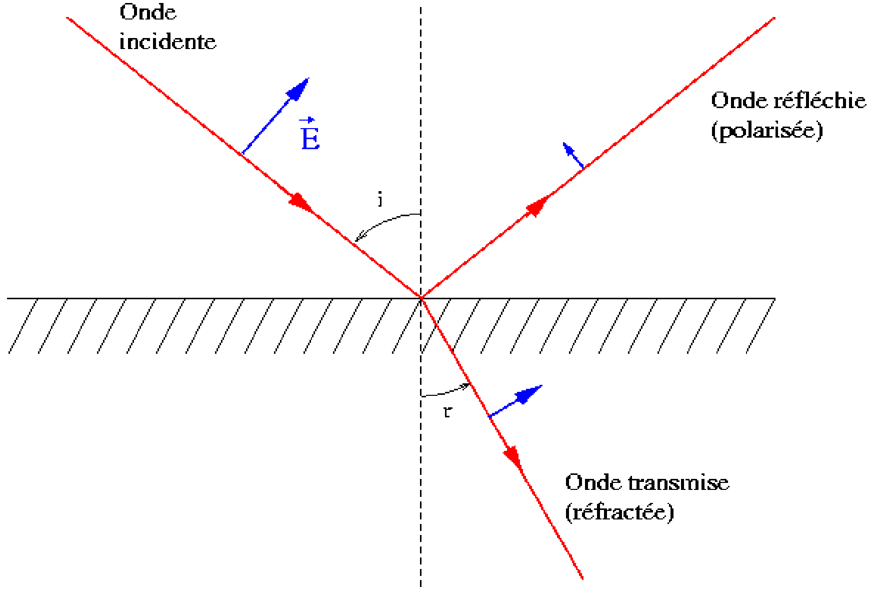
Lumière non polarisée:

- La polarisation change très rapidement (tout les 10^{-8} sec, ou plus vite)



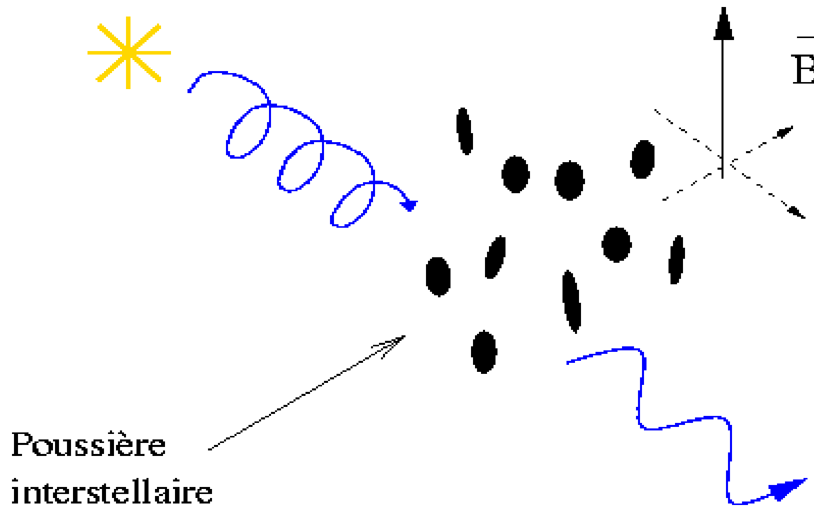
Mécanismes de polarisation.

Polarisation par réflexion sur une vitre.



La composante du champ électrique perpendiculaire au plan du verre est atténuée pour l'onde réfléchie. Elle s'annule pour un angle d'incidence dit de ***Brewster***. La lumière réfléchie est alors **complètement polarisée** (linéairement, parallèlement au plan du verre).

Polarisation dans le milieu interstellaire.



- Les grains de poussière s'alignent avec le champ magnétique externe statique, comme des aiguilles de boussole.

- La composante du champ électrique dans cette direction est absorbée. (elle sert à faire bouger les électrons).

Interférences lumineuses.

Pourquoi réaliser des interférences lumineuses?

Cela permet de décomposer la lumière en sprectre (ex: le réseau)

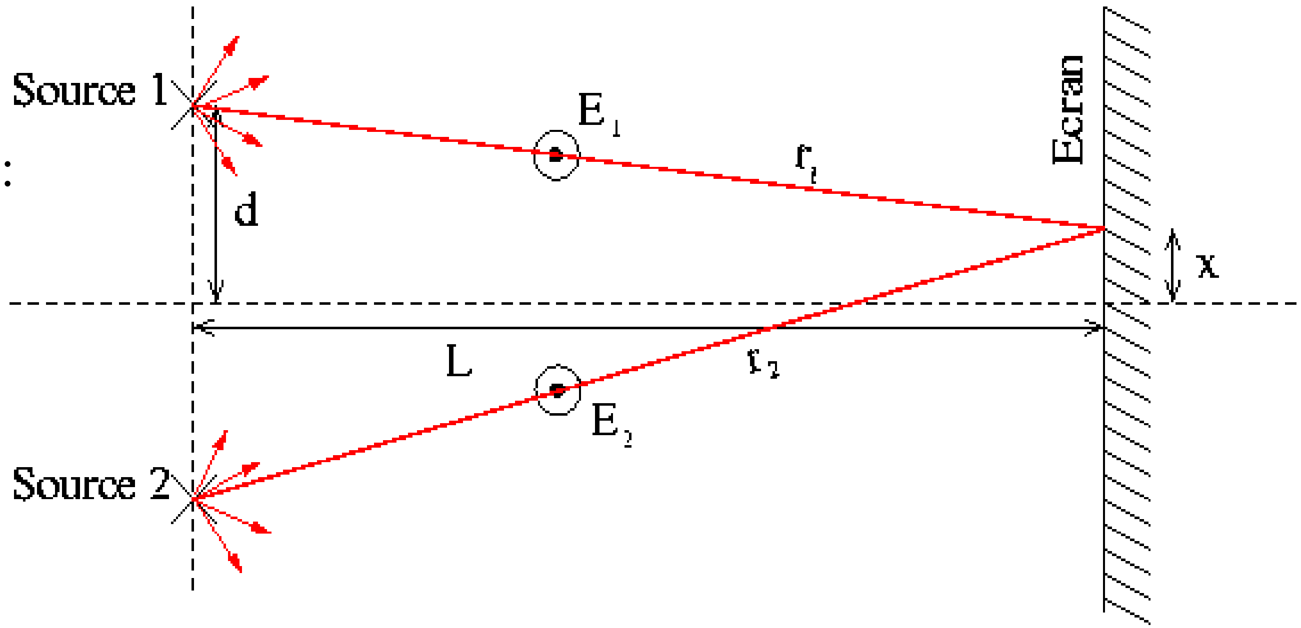
Comment réaliser des interférences lumineuses?

Pour réaliser des interférences lumineuses il faut au moins 2 sources de lumière cohérentes. C'est le cas si les deux sources sont purement monochromatiques (ou sommes de composantes purement monochromatiques)

Champs électriques des deux ondes:

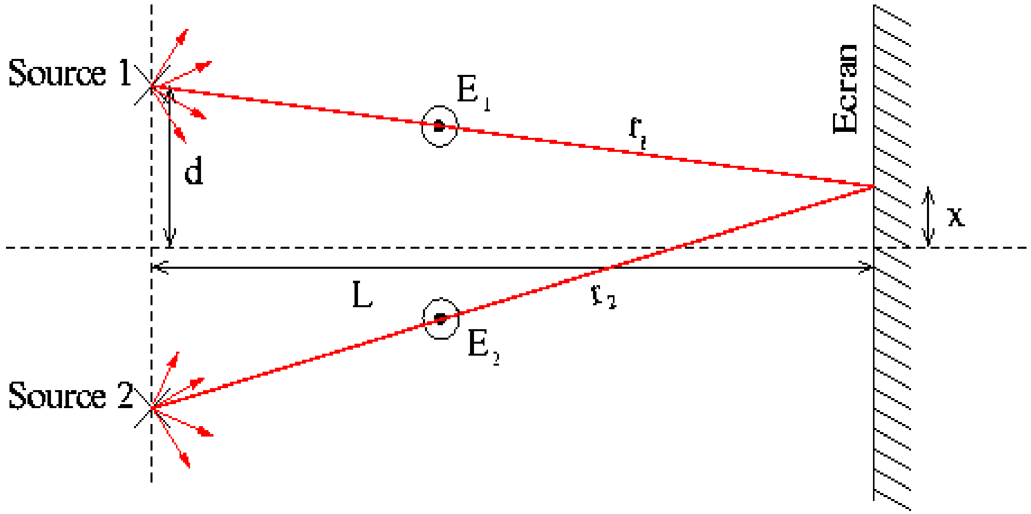
$$\vec{E}_1 = E_0 \sin(k r_1 - \omega t)\vec{u}$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \sin(k r_2 - \omega t)\vec{u}$$



Interférences: formule pour l'éclairement

On calcule le champ électrique sur l'écran:



$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{tot} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\
&= E_0 \left[\sin(k r_1 - \omega t) + \sin(k r_2 - \omega t)\right] \vec{u} \\
&= E_0 \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \vec{u}
\end{aligned}
$$

On suppose que $d << L$ et $x << L$:

$$r_1 = \sqrt{L^2 + (d-x)^2} = L\left(1 + \frac{(d-x)^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(d-x)^2}{L^2}\right)$$

$$r_2 = \sqrt{L^2 + (d+x)^2} = L\left(1 + \frac{(d+x)^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(d+x)^2}{L^2}\right)$$

Donc au premier ordre non nul en x/L:

$$
\begin{aligned}
r_1 + r_2 &\simeq 2L \\
r_1 - r_2 &\simeq \frac{1}{2L}\left[(d-x)^2 - (d+x)^2\right] \\
&\simeq -\frac{2dx}{L}
\end{aligned}
$$

Soit un champ électrique total:

$$\vec{E}_{tot} \simeq E_0 \sin(kL - \omega t) \cos\left(2\pi \frac{xd}{\lambda L}\right)$$

Soit *I(x)*, l'intensité lumineuse sur l'écran:

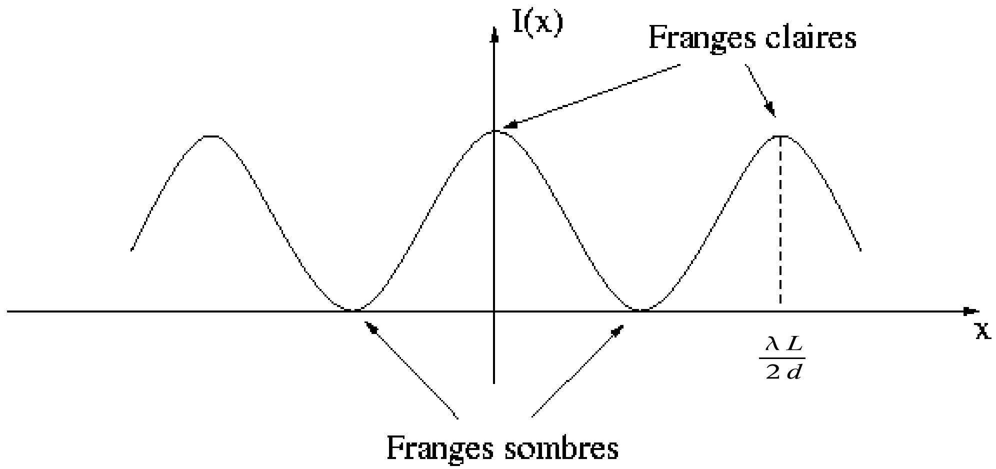
$$I(x) \propto \langle E_{tot}^2(x,t) \rangle$$

Interférences: Formation d'un spectre.

On peut donc décrire **l'intensité lumineuse sur l'écran**:

$$I(x) \propto \left\langle E_{tot}^2(x,t) \right\rangle_t$$

$$\propto \cos^2\left(2\pi \frac{x\,d}{\lambda L}\right)$$



On a des franges claires si $I(x)=I_{max}$, soit:

$$x = \lambda\, n \frac{L}{2d}$$

On a des franges sombres si $I(x)=0$, soit:

$$x = \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{2d}$$

La position des franges claires dépend de λ
=> décomposition en spectre.

Pouvoir de résolution et interférométrie.

Pouvoir de résolution d'un télescope (miroir de diamètre D):

- Théoriquement (limité par la diffraction):

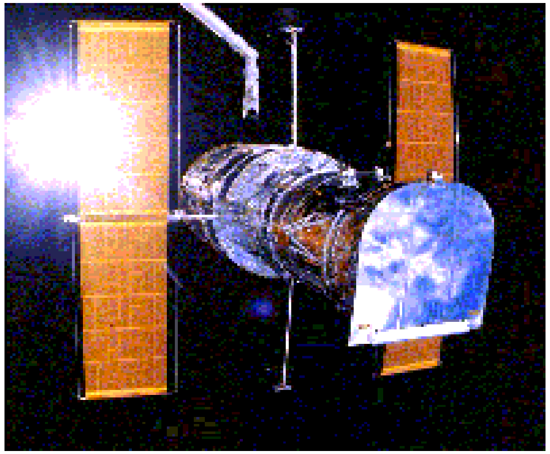
$$\alpha \simeq 1.2\frac{\lambda}{D}$$

Hubble space telescope: $\alpha=0.0003°$

- En pratique limité par:
  - L'atmosphère.
  - La qualité d'un miroir de grand D.

Solution: utiliser les interférences à 2 (ou +) miroirs

- D = distance entre les miroirs.
- On peut corriger l'atmosphère.

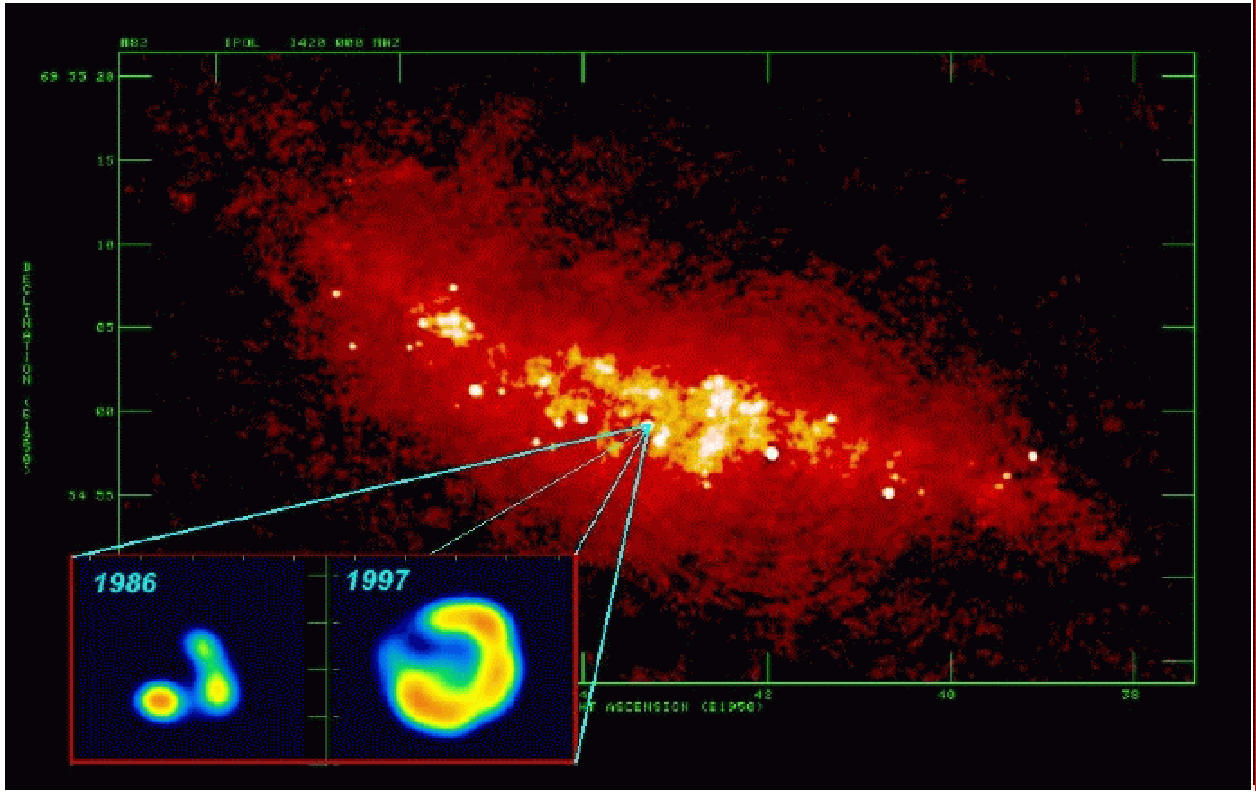


Hubble space telescope

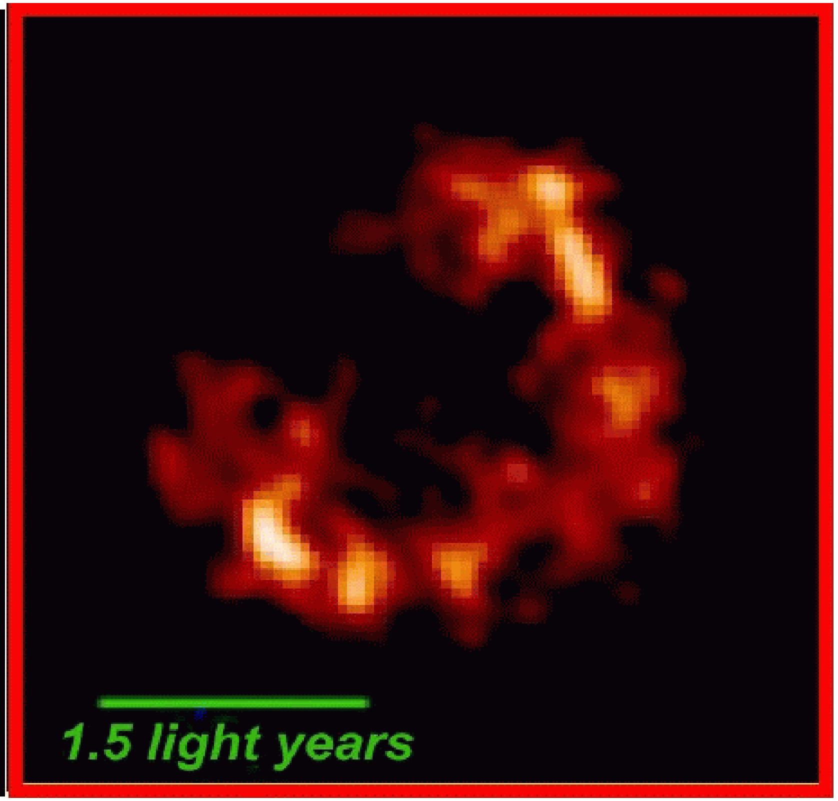
Interféromètre du plateau de Bure

Exemple:
reste de supernovae dans M82

A. E. McDonald *et al.* 2001 (European VLBI network)



Interféromètre MERLIN (200km de base)



Interféromètre intercontinental
(qq 1000 km de base)

Longueur d'onde: 20 cm

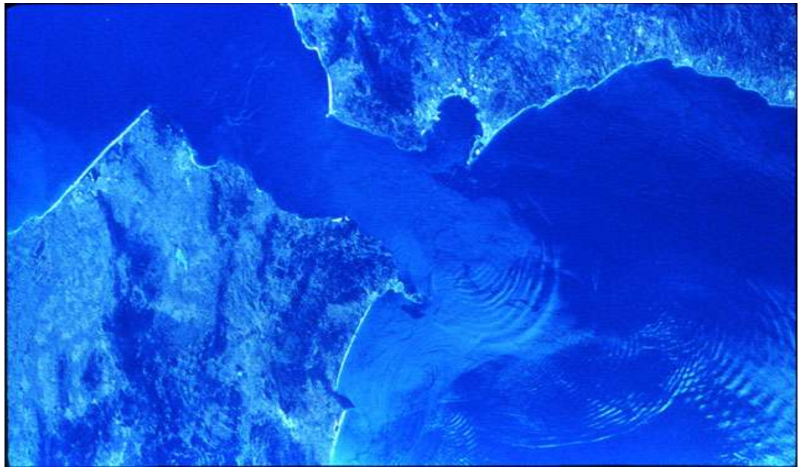
Les solitons:
une expérience historique

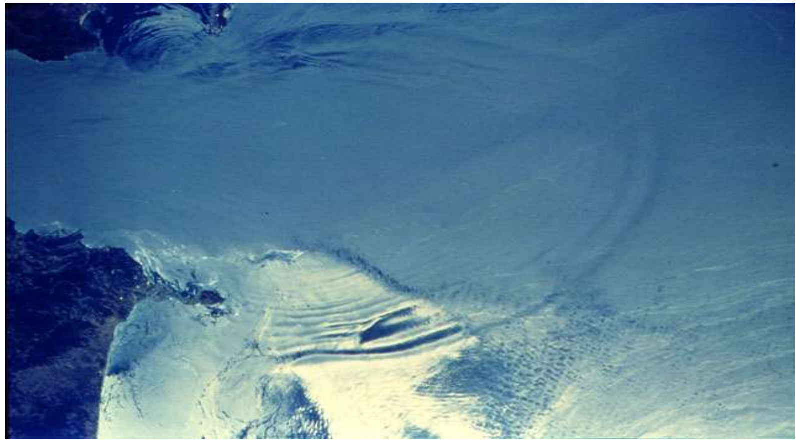
"Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la premier fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup: mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1 1/2 pied de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal."

J. Scott Russell, 1834

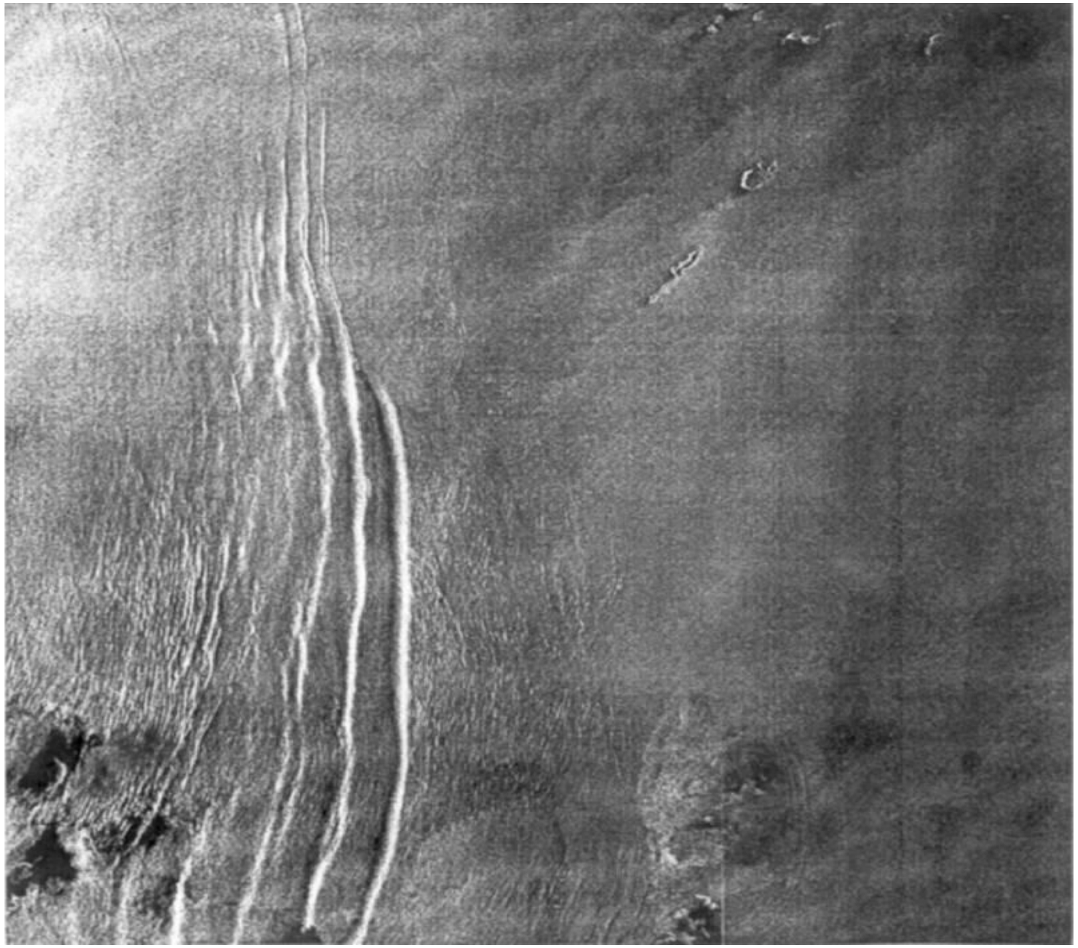
Edinbourg 1995

Solitons et océanographie.





Détroit de Gibraltar
(photos NASA)



Mer d'Andaman
(photo ESR-ESA)

Solitons, propriétés principales.

A quoi reconnaît-on un soliton?

- Solution d'une équation non-linéaire.
- C'est une onde progressive.
- La vitesse de propagation dépend de l'amplitude.

Propriétés complémentaires:

- Très peu de dissipation d'énergie.
- Interactions à 2 solitons: pas de déformation.

Ondes à la surface de l'eau

Equation de Korteveg-deVries:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6\, u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Gravité + tension de surface

u(x,t) est la variation de hauteur de la surface.

Solutions analytiques:

$$u(x,t) = \frac{-a}{ch^2\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(x-2at)\right)}$$

Encore une onde...

Spiral Galaxy NGC 1232 - VLT UT 1 + FORS1

ESO PR Photo 37d/98 (23 September 1998)