La vie des étoiles

Problème: expliquer une source d’énergie énorme pendant des milliards d’années

Impossible à expliquer avant le XX^{ème} siècle

Energie chimique (Hypothèse 1)

Typiquement: e_{chim} ~ 1 eV

~ 10^{-19} J/molécule

$C + 2O \rightarrow CO_2$

Energie disponible ~ $M/\mu \times e_{chim}$

Temps de vie « chimique »:

$$\boxed{t_{chim} \sim \frac{Me_{chim}}{L\mu} \sim 10^4 \textbf{ ans} \quad \ll \quad \textbf{Age du soleil}}$$

Energie gravitationnelle (Hypothèse 2)

Le théorème du viriel:

Très général: systèmes **auto-gravitants** en **équilibre**

Relie: énergie potentielle E_{pot} et
énergie cinétique E_{cin}

Applications: étoiles, amas globulaires, amas galaxies

En moyenne:

$$\boxed{\overline{E}_{pot} + 2 \cdot \overline{E}_{cin} = 0}$$

Applications: calcul de la température interne et de la luminosité (hyp 2) d'un astre

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}kT - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$\begin{cases} E_{cin} = -\dfrac{1}{2} E_{pot} \quad \textbf{(viriel)} \\ E_{tot} = \dfrac{E_{pot}}{2} \end{cases}$$

d'où:

$$\begin{cases} \overline{T} \sim \dfrac{1}{5}\dfrac{GM\mu}{kR} \\ L = -\dot{E} \sim -\dfrac{3}{10}\dfrac{GM^2}{R^2}\dot{R} \end{cases}$$

Temps de Kelvin-Helmholtz

$$L \sim -\frac{3}{10}\frac{GM^2}{R^2}\dot{R}$$

AN:

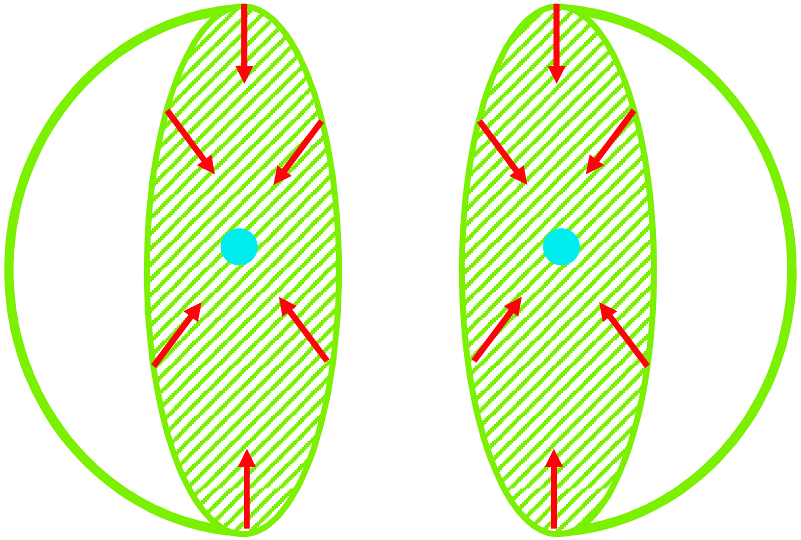
$$\begin{cases} L \sim 4\times 10^{26}\,W \\ M \sim 2\times 10^{30}\,kg \\ R \sim 7\times 10^{5}\,km \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{centre} \sim 10^7 \ \mathbf{K} \\ \dot{R} \sim -50 \ \mathbf{m/an} \end{cases}$$

Si *L* uniquement dû à contraction gravitationnelle,
Alors durée de vie = temps de *Kelvin-Helmholtz:*

$$\boxed{t_{KH} \sim \frac{R}{|\dot{R}|} \sim 10^7 \ \mathbf{ans}}$$

Temps court… (NB: ok pour *Jupiter*)

Equilibre d'une étoile



Analyse dimensionnelle: $$P_{grav} \sim \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}$$

Equilibre de l'étoile: $$\boxed{P_{grav} \sim P_{gaz} \quad \left(+ P_{photons} + P_{Fermi}\right)}$$

Pression thermique

$$P_{therm} = (n_e + n_p)kT = 2n_p kT \sim \frac{2\rho}{m_p} kT$$

Or $T \sim \frac{GMm_p}{5kR}$ (viriel) et $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

d'où:

$$\boxed{P_{therm} \sim \frac{3}{10\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4} \sim P_{grav} !}$$

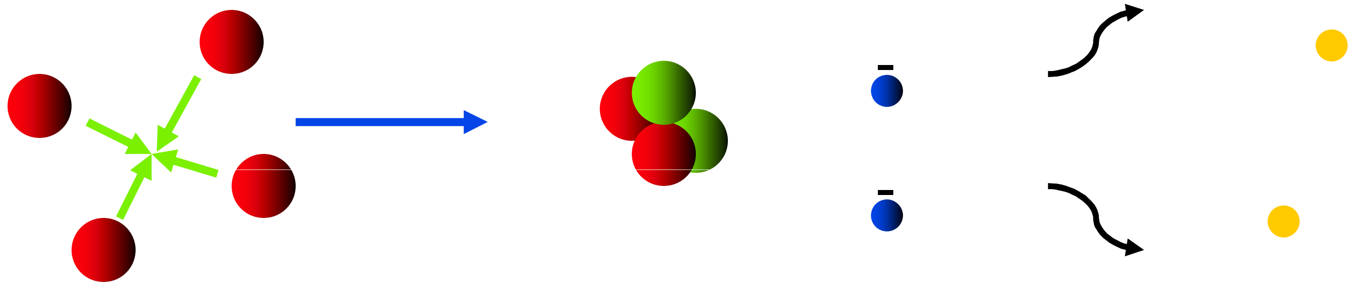
Donc: le chauffage de l'étoile *via* le viriel équilibre le poids, sur le temps de Kelvin-Helmholtz si il n'y a pas d'autres sources d'énergie que la gravité…

<u>Energie nucléaire</u> (Hypothèse 3)

Equivalence masse-énergie: (Einstein)

$$E=mc^2$$

Transformation hydrogène-hélium:



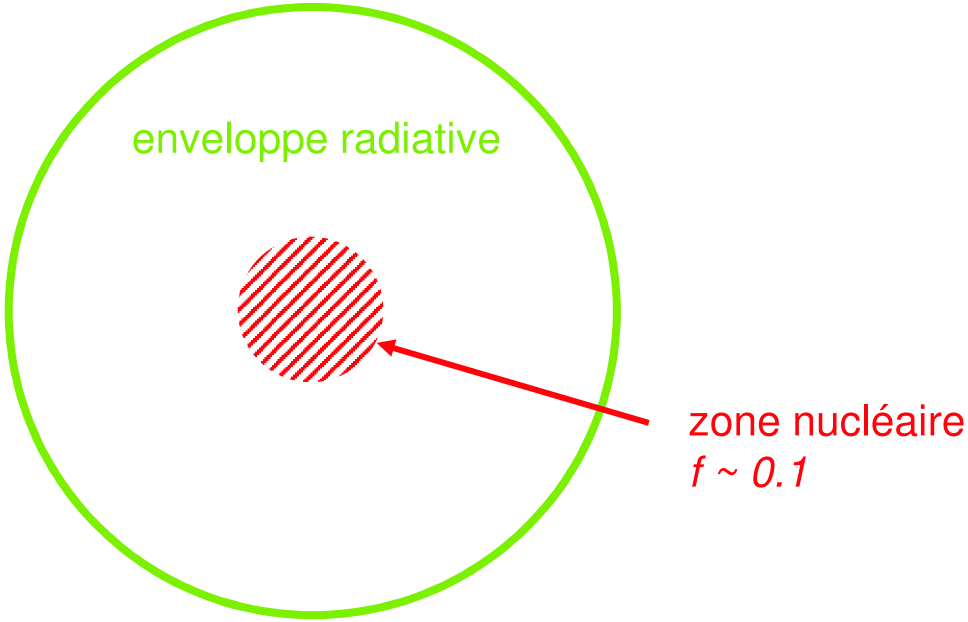
$$\boxed{p^+ + p^+ + p^+ + p^+ \rightarrow H_e^{++} + 2e^+ + 2\gamma + 2\nu_e}$$

Perte de masse: $m_p = 1.00797$ *uma*
$m_{He} = 4.0026$ *uma*

$$4\, m_p - m_{He} \sim 0.028\, m_p$$

$$\boxed{\Delta E_{nuc} \sim 0.007\, m_p\, c^2 \text{ par proton fusionné}}$$

Energie disponible dans le Soleil:



$$E_{nuc} \sim f \times 0.007 \times Mc^2$$

$$\boxed{t_{nuc} \sim 7 \times 10^{-4} \frac{Mc^2}{L} \sim 10^{10} \text{ ans pour le Soleil}}$$

NB:

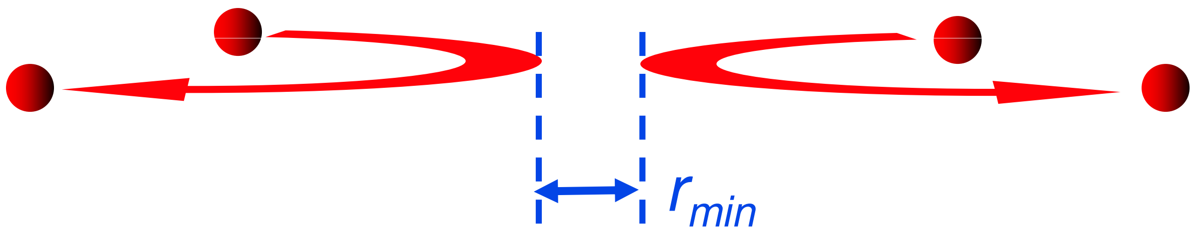
$$\Delta E_{chim} \sim 1 \; eV$$

$$\Delta E_{nuc} \sim 1 \; MeV$$

Quelles conditions physique pour des réactions thermonucléaires?

Température interne: $\overline{T} \sim \frac{1}{5} \cdot \frac{GM\mu}{kR}$ quand R ↘ on a T ↗

La barrière coulombienne:



Théorème de l'énergie mécanique:

$$E = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$E_\infty = \frac{1}{2} m_p {v_\infty}^2 = E_{r\min} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r_{\min}}$$

Or: $$\frac{1}{2} m_p v_\infty^2 \sim \frac{3}{2} kT$$

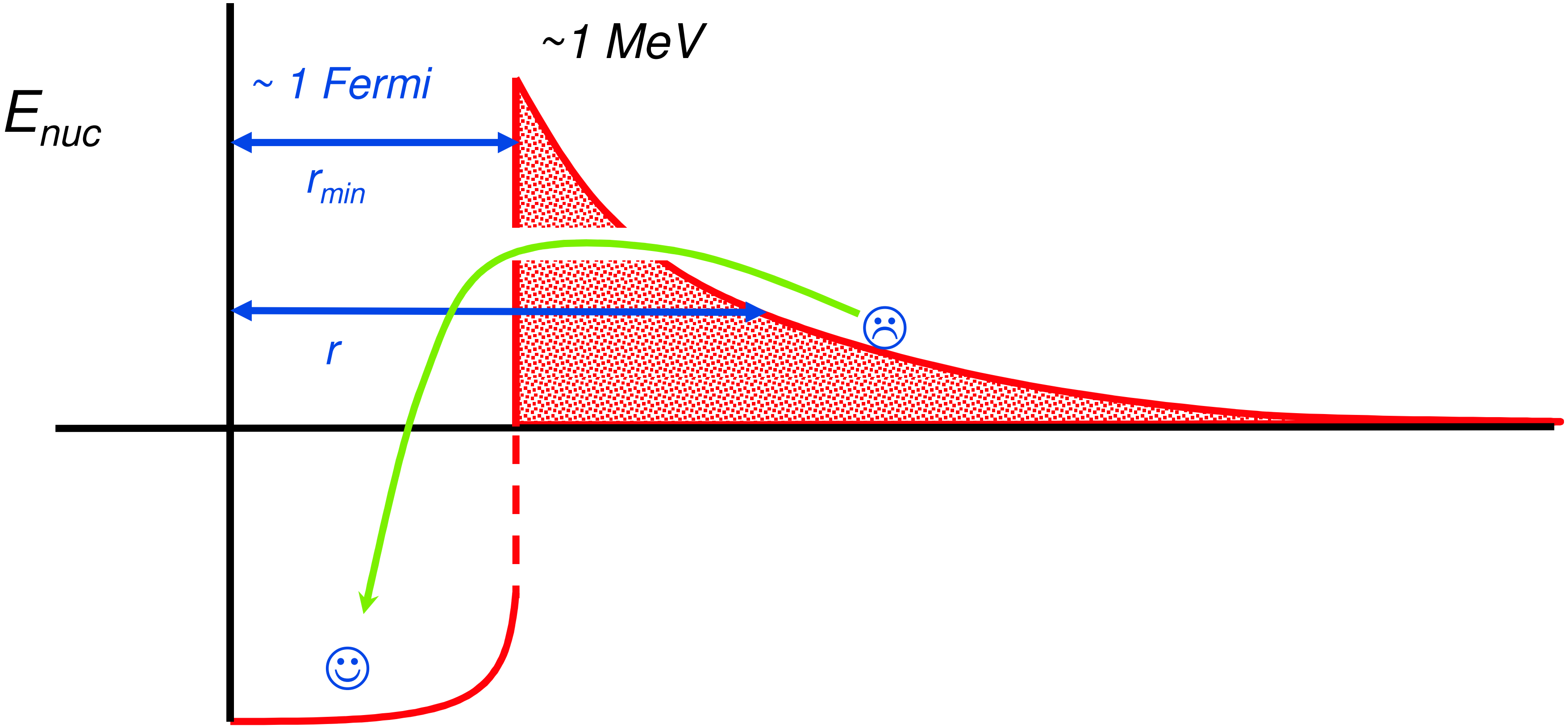
d'où: $$T \sim \frac{2}{3k} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^2}{r_{\min}}$$

AN:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} = 9 \times 10^9 \ \text{uSI} \\ e = 1.6 \times 10^{-19} \ \text{C} \\ r_{\min} \sim 10^{-15} \ \text{m} \sim \ 1 \ \text{Fermi} \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_{nuc} \sim 10^{10} \ \text{K}}$$

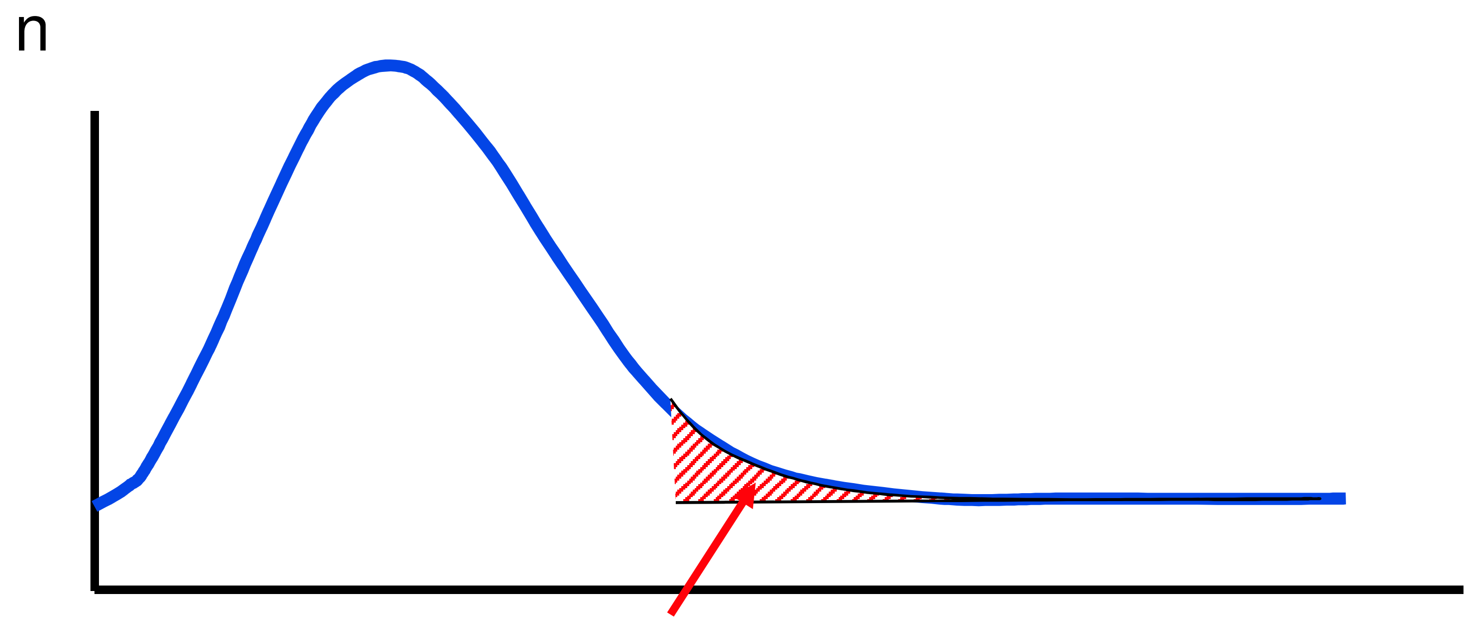
Trop chaud!

Première correction: Effet tunnel



permet de descendre la limite de fusion à $T \sim 10^8$ *K*,
encore trop chaud…

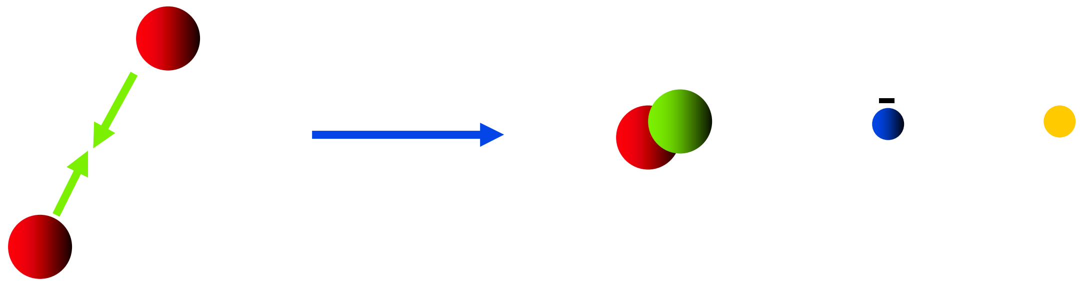
<u>Deuxième correction: distribution maxwelienne des vitesses</u>



permet de descendre la limite de fusion à $T \sim 10^7$ K, bien…

NB: si noyaux plus lourds, répulsion $\propto Z^2$: $T \sim 10^7 Z^2$ K

Le cycle proton-proton

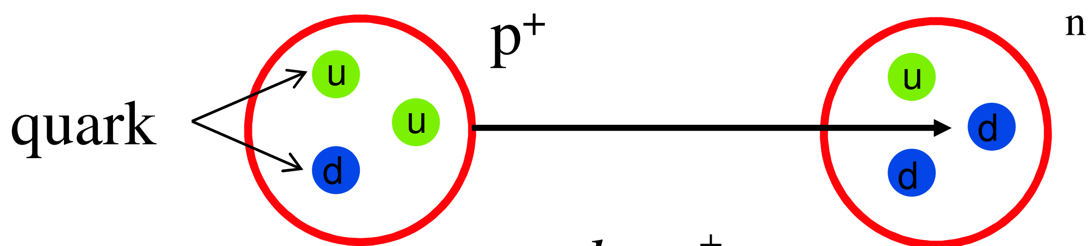


$$p^+ + p^+ \rightarrow \qquad D^+ + e^+ + \nu_e$$

D^+: deutéron

Fusion: interaction *forte*

Désintégration $p^+ \rightarrow n + e^+$: interaction *faible*



$$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e$$

Interaction *forte*:

$$D^{+} + p^{+} \rightarrow \quad {}^{3}H_{e}^{++} + \gamma$$

$${}^{3}H_{e}^{++} + {}^{3}H_{e}^{++} \rightarrow \quad {}^{4}H_{e}^{++} + p^{+} + p^{+}$$

En reprenant l'équation précédente

$$p^{+} + p^{+} \rightarrow D^{+} + e^{+} + \nu_{e}$$

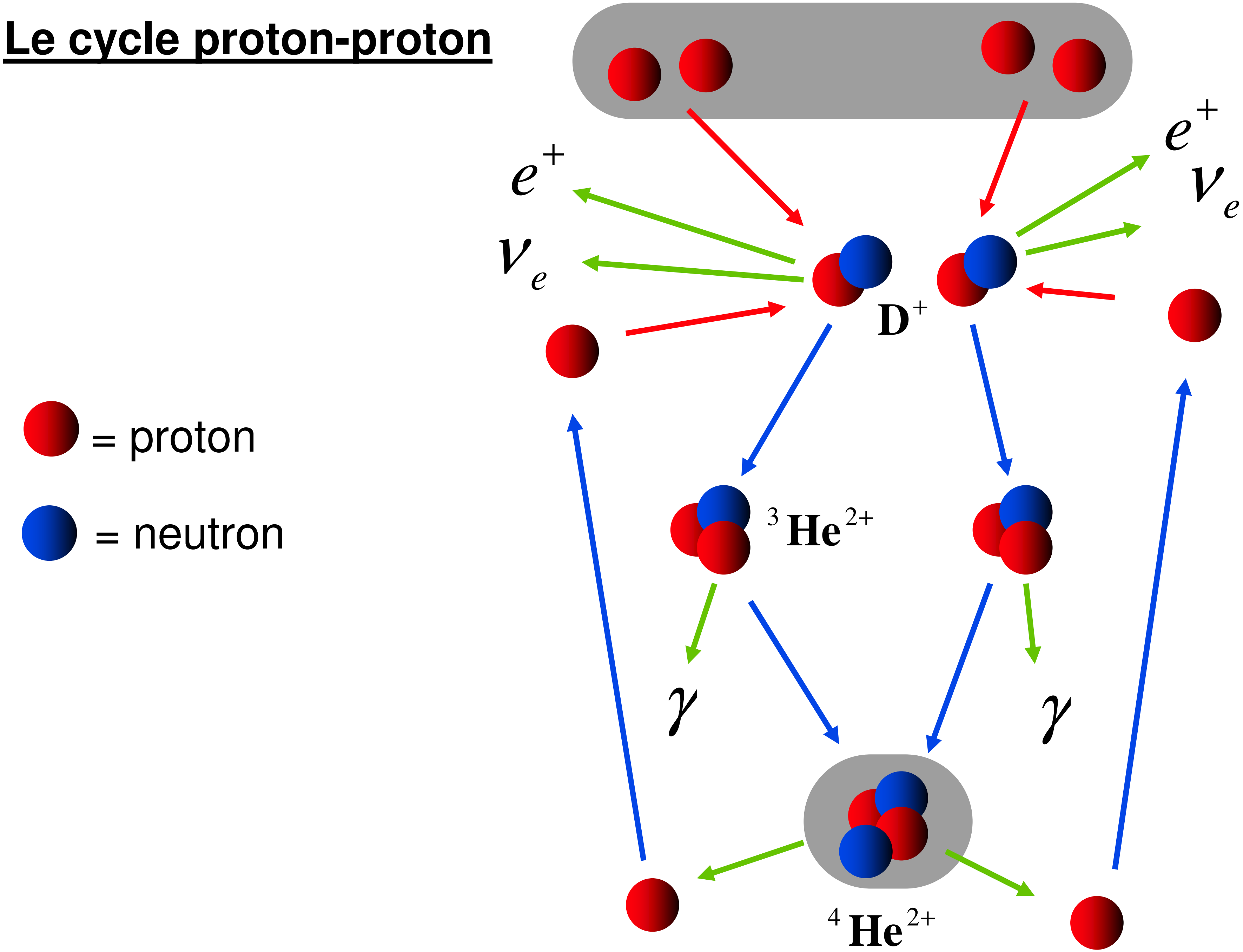
on a le bilan total du: *cycle proton-proton*
(ou *p-p*)

$$\boxed{4p^{+} \rightarrow {}^{4}H_{e}^{++} + 2e^{+} + 2\gamma + 2\nu_{e}}$$

annihilation avec $e^{-} \rightarrow$ énergie

Les neutrinos s'échappent du Soleil en 2 sec !

Le cycle proton-proton



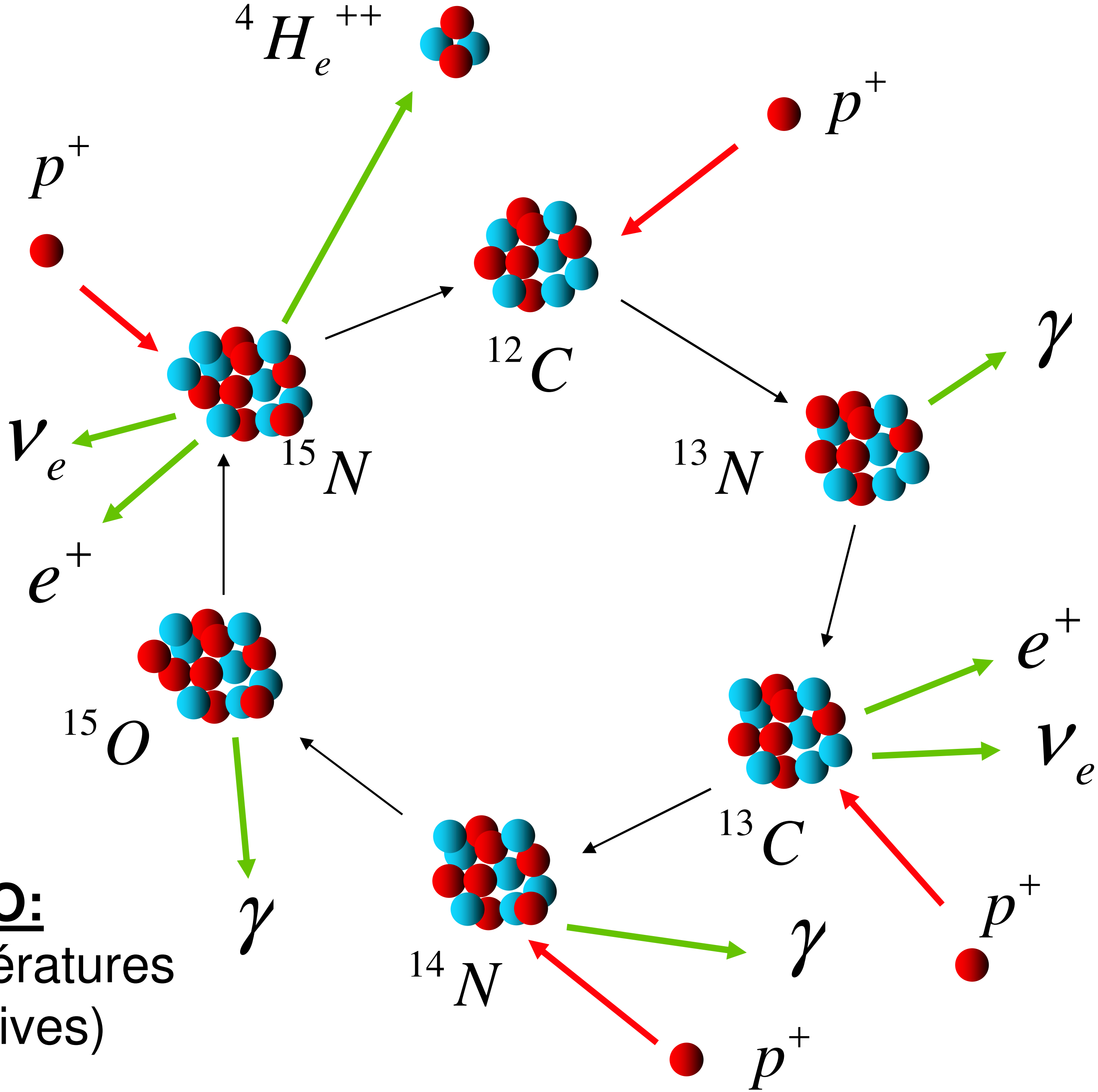
Le cycle CNO

Devient plus efficace que le cycle p-p quand *T* augmente (*i.e.* pour des étoiles plus massives que le Soleil)

$$
\begin{array}{llllllll}
{}^{12}C & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{13}N & + & \gamma & \\
{}^{13}N & & & \rightarrow & {}^{13}C & + & e^{+} & + \ \nu_e \\
{}^{13}C & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{14}N & + & \gamma & \\
{}^{14}N & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{15}O & + & \gamma & \\
{}^{15}O & & & \rightarrow & {}^{15}N & + & e^{+} & + \ \nu_e \\
{}^{15}N & + & {}^{1}H & \rightarrow & {}^{12}C & + & {}^{4}H &
\end{array}
$$

Bilan: idem cycle p-p

$$\boxed{{}^{1}H + {}^{1}H + {}^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}H_e + 2\gamma + 2e^{+} + 2\nu_e}$$



Le cycle CNO:
Hautes températures
(étoiles massives)

Pression de Fermi

et

astres denses

Fermions et bosons

Fermions:

- spin *demi-entier* (1/2 ħ, 3/2 ħ, 5/2 ħ)

  ↔ (neutrons,protons,e^-,quark,neutrino)
- obéissent au *principe d'exclusion de Pauli*

individualistes

Bosons:

- Spin *entier* (0 ħ, ħ, 2 ħ) ↔ (photons, hydrogène,etc…)
- pas d'exclusion

grégaires

Principe d'incertitude d'Heinsenberg

S'applique à toutes les particules,
relie des quantités conjuguées:

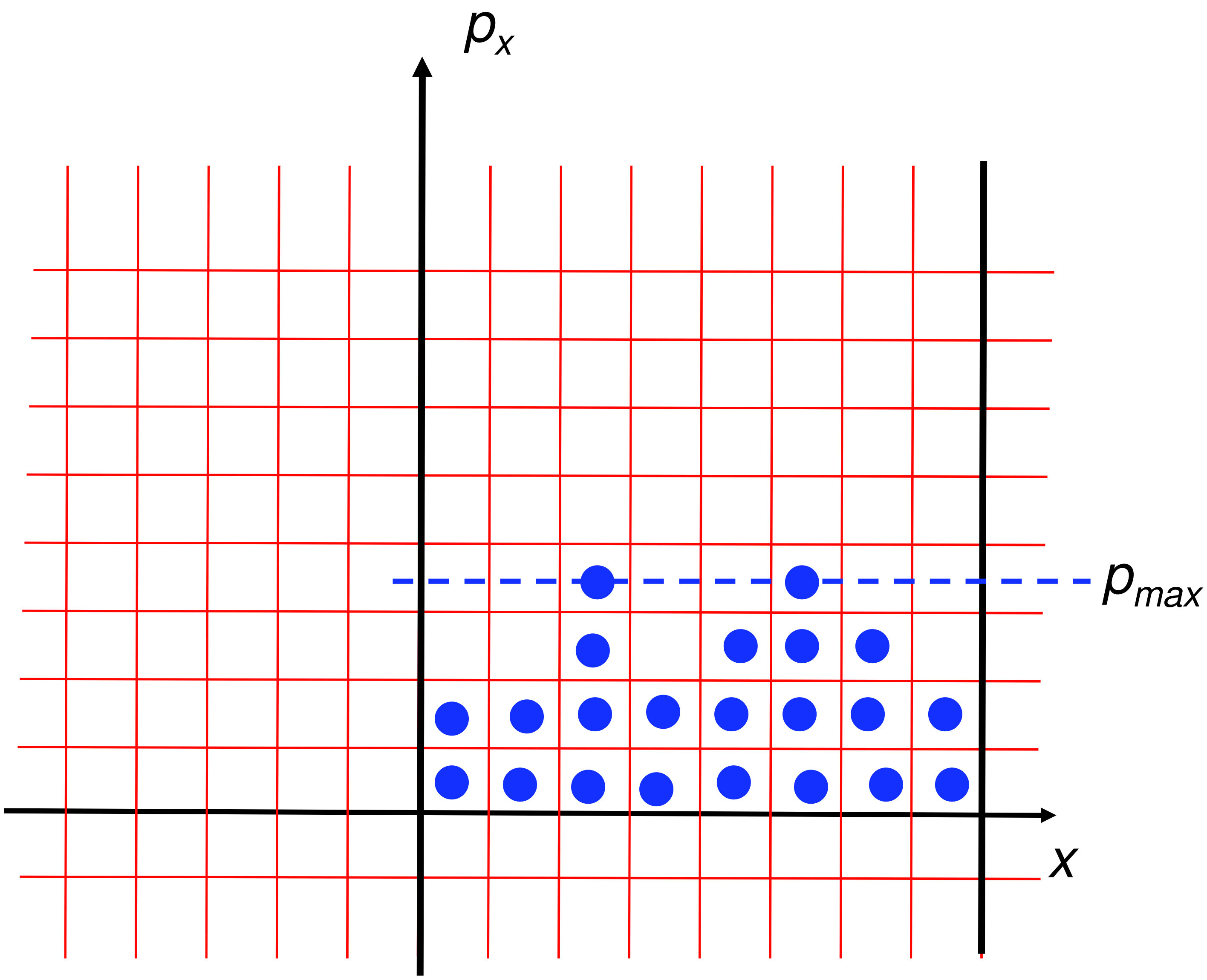
$$\Delta x \, . \, \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta t \, . \, \Delta E \geq \hbar$$

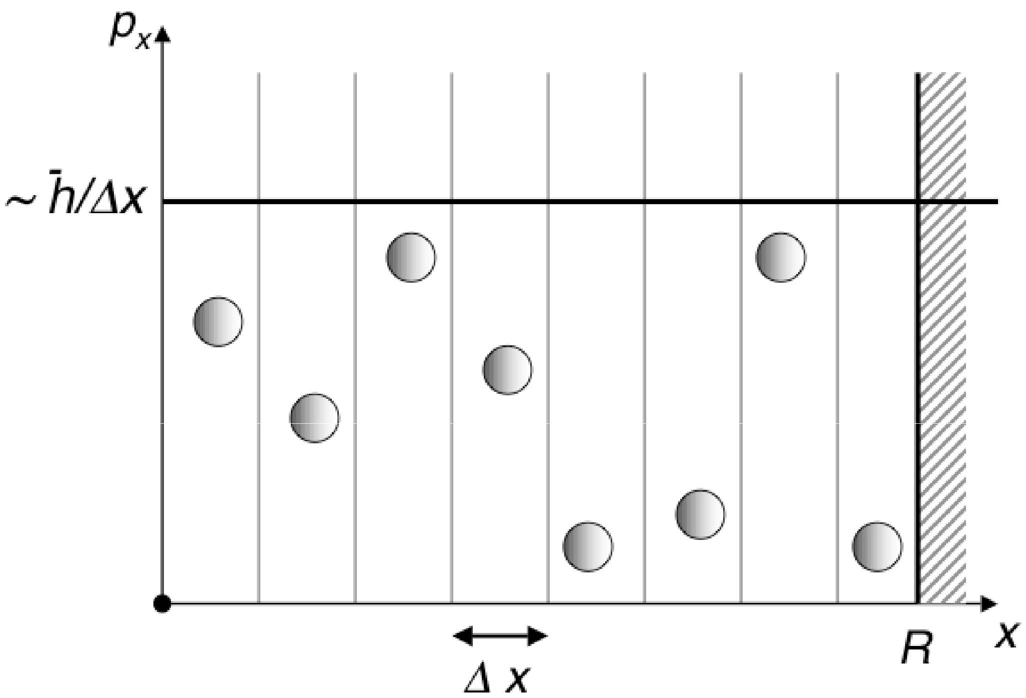
etc…

h: constante de Planck ~ 6.63×10^{-34} J . sec
$\hbar$: $h/2\pi$

Distribution des fermions



La pression de Fermi (ou de dégénérescence)



$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$$

$$p_x \sim \hbar / \Delta x \qquad \Rightarrow \qquad p_x \sim \hbar\, n^{\frac{1}{3}}$$

Or $\Delta x = n^{-1/3}$ (n: nombre densité)

Pression: $P_F = n v_x p_x$ $\left(P = \dfrac{nmu^2}{3} \right)$

si gaz *classique (v << c)*: $p_x = m v_x$

d'où:

$$\boxed{P_F = \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}}$$

Pression de Fermi due à des fermions de masse *m* et avec une densité de *n* fermions m^{-3}

fondamental pour la stabilité des planètes, naines blanches, étoiles a neutrons

Cas particulier d'un milieu globalement neutre contenant des noyaux de charge *Z+*, de masse atomique *A* et des électrons de masse m_e:

Formule générale: $$P_F = \frac{\hbar^2}{m} n^{5/3}$$

NB: $m_e << m_p$ donc $P_F(e) >> P_F(p)$

Neutralité électrique: $$n_e = Z n_{noyaux}$$

Essentiel de la masse dans nucléons:

$$\rho \sim A n_{noyaux} m_p \quad \Rightarrow \quad n_{noyaux} \sim \frac{\rho}{A m_p}$$

Pression de Fermi due aux électrons:

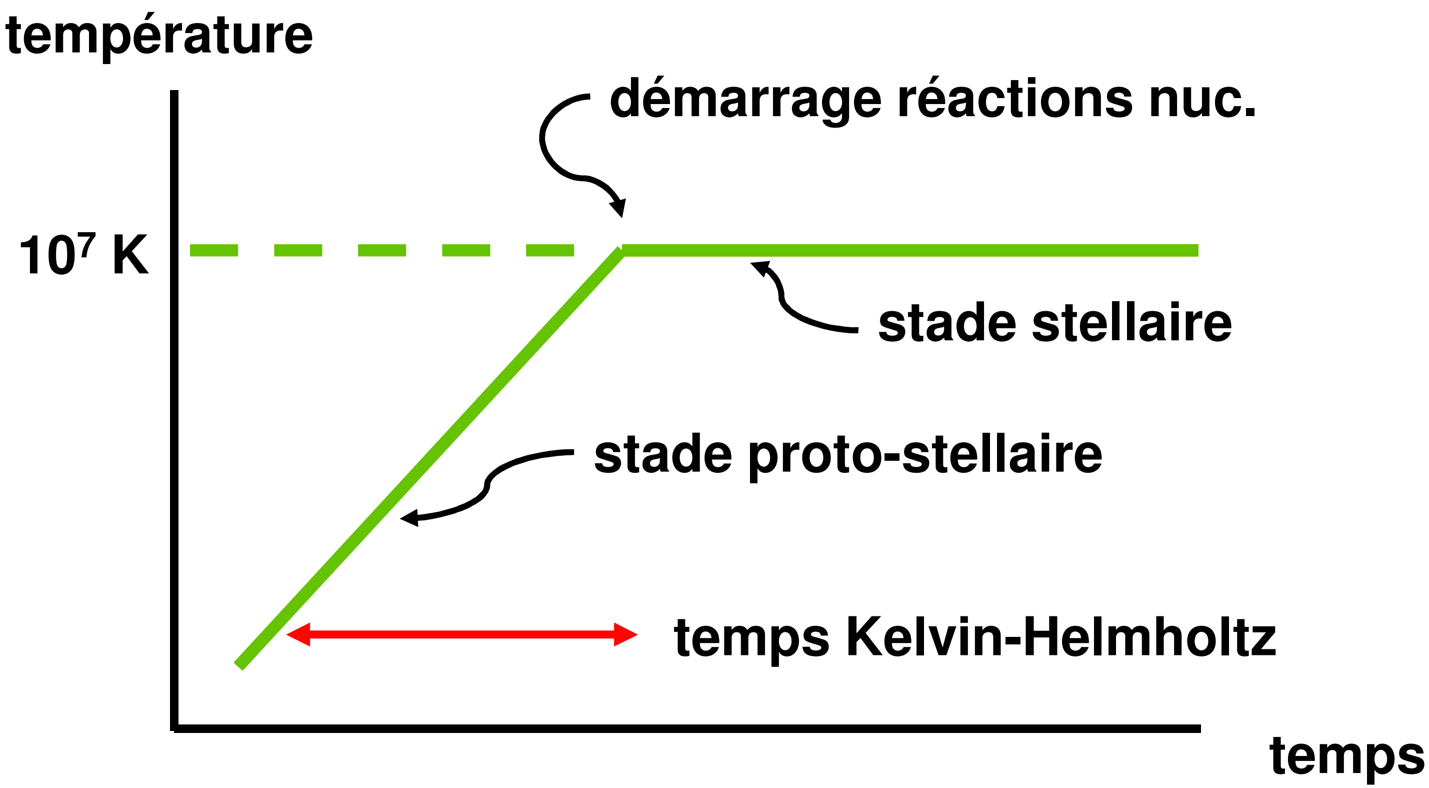
$$\boxed{P_F(e^-) = 2\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}}$$

(NB: la pression de Fermi des électrons domine la pression due aux protons à cause de $1/m_e >> 1/m_p$)

La masse stellaire minimum

Température centrale d'une étoile composée d'hydrogène (viriel):

$$T_{cent} \sim \frac{GMm_p}{2kR}$$



Paradoxe: tout astre devrait devenir une étoile pour *R* suffisamment petit.

- Réponse: limite à la contraction imposée par la *pression de Fermi:*

$$P_F(e^-) = 2\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\left(\frac{\rho}{m_p}\right)^{5/3}$$

Comme $\rho \propto M/R^3$ on obtient:

$$P_F(e^-) \sim K \cdot \frac{M^{5/3}}{R^5} \text{ Pa, où } K = 10^6 \text{ uSI}$$

avec toujours :

$$P_{therm} \sim \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}$$

Définissons:

$$\alpha = \frac{P_F}{P_{therm}} = \frac{4\pi K}{3G} \cdot \frac{1}{RM^{1/3}}$$

(Degré de dégénérescence de l'astre, si $\alpha>1$ l'astre arrête de se contracter)

En éliminant R dans: $T_{cent} \sim \dfrac{GMm_p}{2kR}$

On obtient:

$$\boxed{T_{cent} \sim Cst\ M^{\frac{4}{3}}\alpha} \quad \text{avec} \quad Cst = \left(\frac{3G^2 m_p}{8\pi Kk}\right)$$

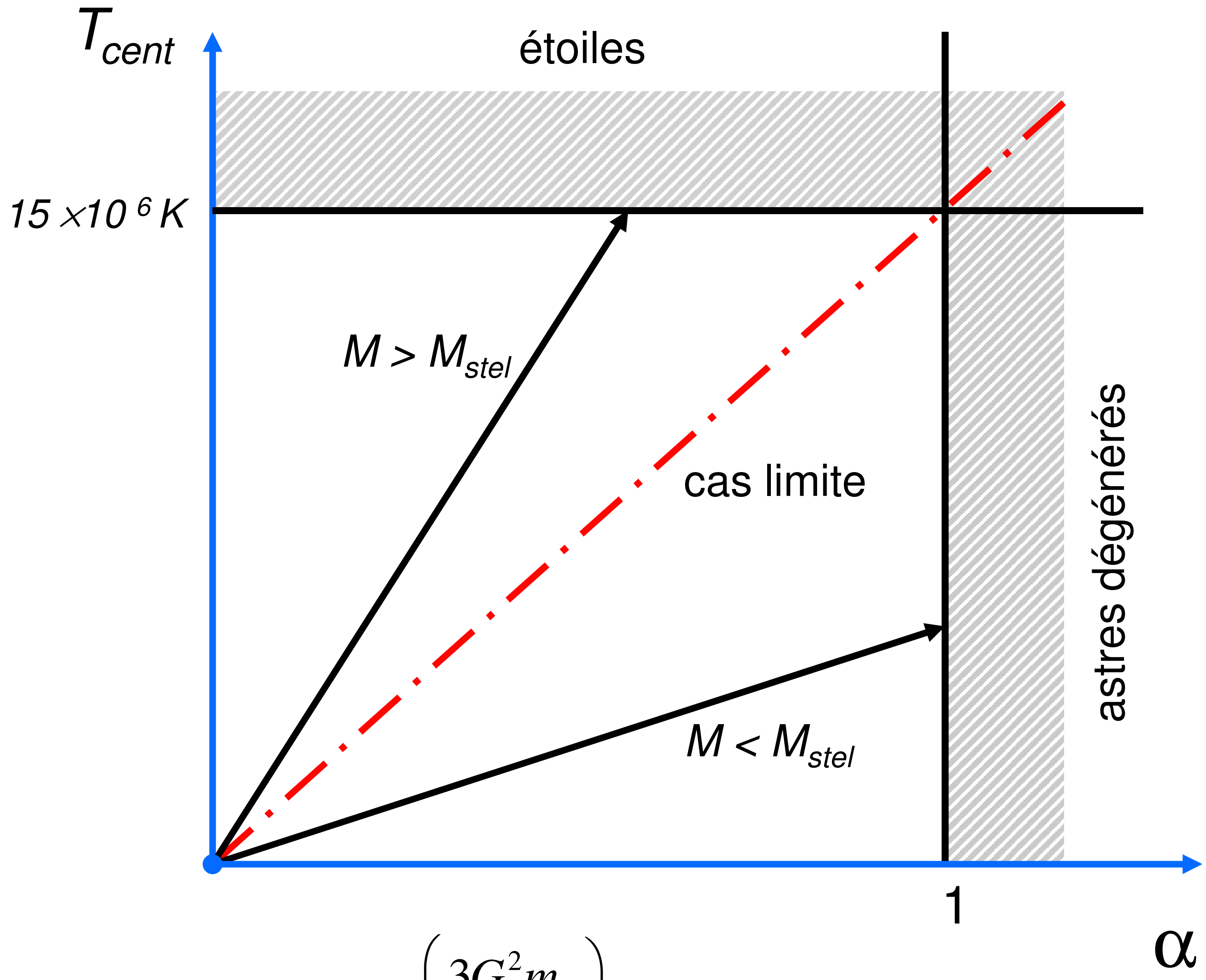
Deux possibilités:

(1) T_{cent} atteint ~ 15 $\times 10^6$ K *avant* que α=1

$\rightarrow$ **une étoile est née**

(2) α=1 atteint *avant* que T_{cent} ~ 15 $\times 10^6$ K

$\rightarrow$ **astre dégénéré sans réactions nucléaires**



Cas limite: $T_{nuc} \approx 15 \times 10^6 \text{ K} = \left(\frac{3G^2 m_p}{8\pi K k} \right) M_{stel}{}^{4/3} \times 1$

Cas limite $\Rightarrow$ $$M_{stel} \sim \left(\frac{8\pi K}{3G^2} \cdot \frac{kT_{nuc}}{m_p} \right)^{3/4}$$

AN: $M_{stel} \sim 0.03\ M_{\odot}$

Calcululs plus précis : $\boxed{M_{stel} \sim 0.08\ M_{\odot} \sim 80\ M_J}$

En-dessous de la masse stellaire:

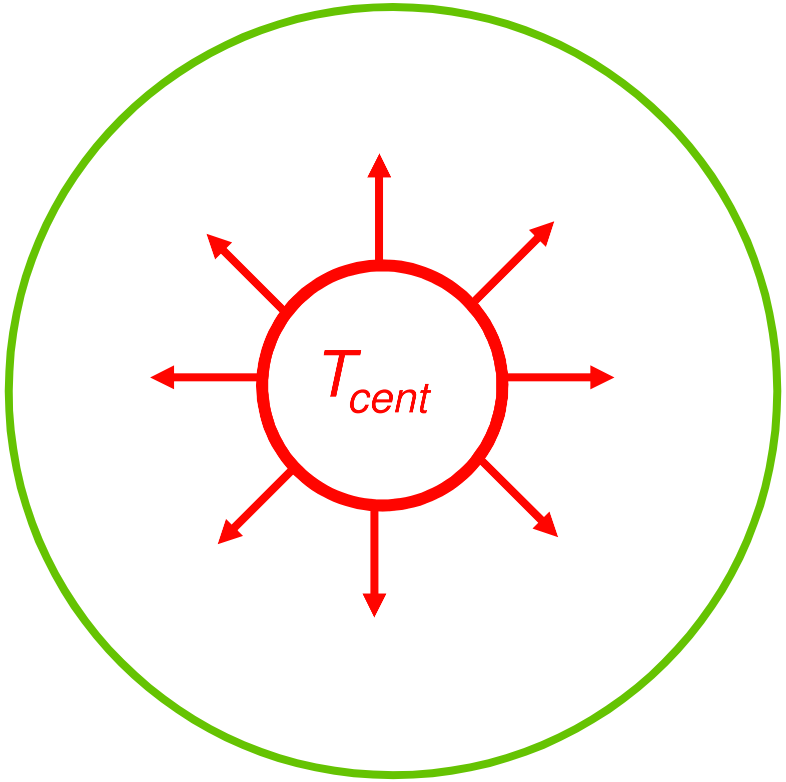
- $13\ M_J < M < 80\ M_J$

  Quelques réactions nucléaires (L_i,D) $\rightarrow$ naine brune

- $M < 13\ M_J$

  Aucune réaction nucléaire $\rightarrow$ planète

Masse stellaire maximum



$$P_{cent} = P_{mat} + P_{ray}$$

En général, $P_{ray} << P_{mat}$, sauf si…

$$P_{ray} = \frac{e_{ray}}{3} = \frac{4\sigma}{3c}(T_{cent})^4$$ (loi de Stefan volumique)

Mais:

$$T_{cent} = \frac{GMm_p}{2kR}$$ (viriel)

$$P_{ray} = \frac{4\sigma}{3c}\left(\frac{Gm_p}{10k}\right)^4 \times \frac{M^4}{R^4}$$

$$P_{grav} = \frac{3G}{8\pi} \times \frac{M^2}{R^4}$$

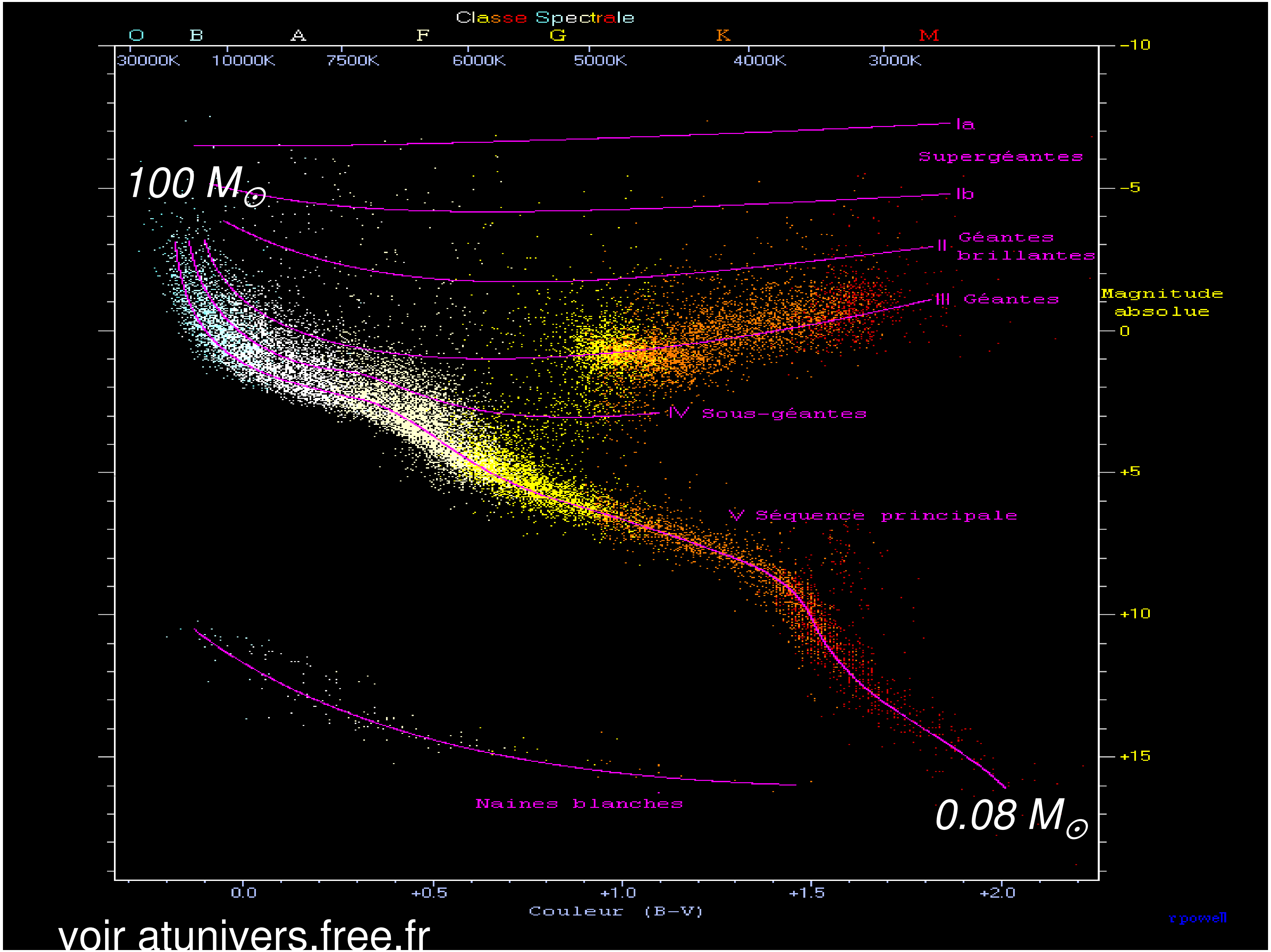
Donc: si *M* trop grand, l'étoile explose…

AN:

$$M_{\mathbf{max}} \sim \left(\frac{9Gc}{32\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10k}{Gm_p}\right)^2 \sim 140\, M_{Sol}$$

En fait:

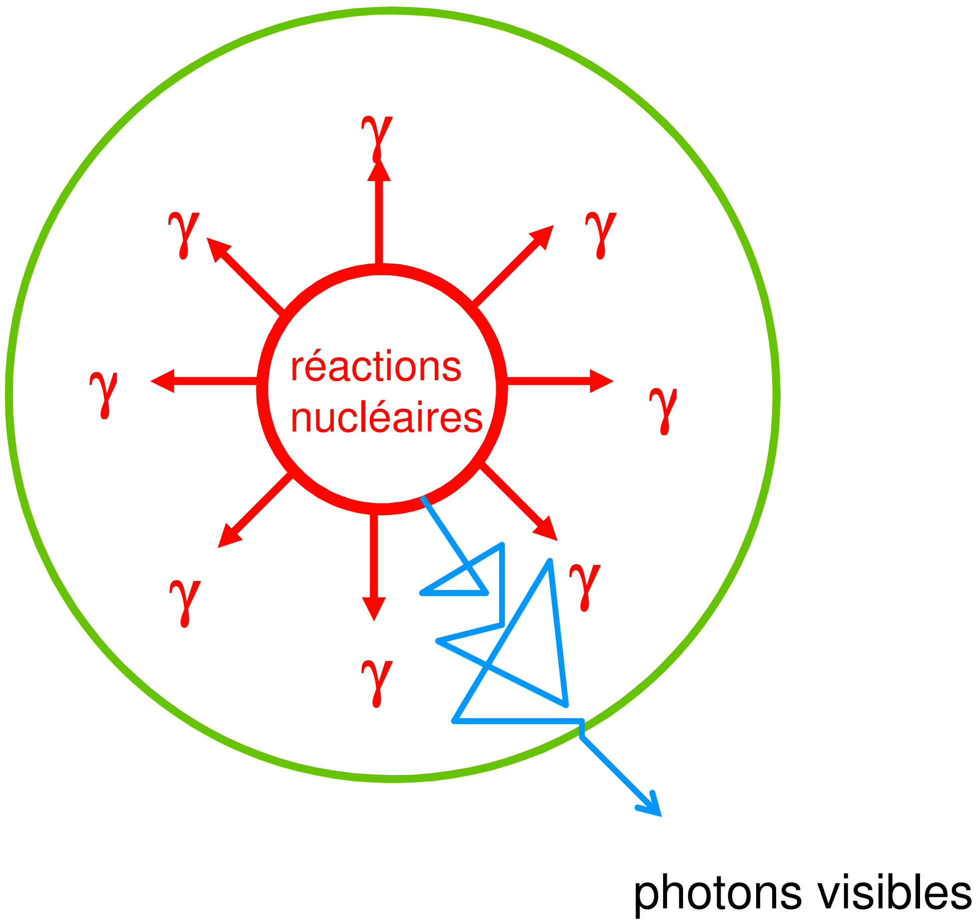
$$\boxed{M_{\max} \sim 100\, M_{Soleil}}$$



Classe Spectrale
O B A F G K M
30000K 10000K 7500K 6000K 5000K 4000K 3000K
Ia
Supergéantes
Ib
II Géantes brillantes
III Géantes
IV Sous-géantes
V Séquence principale
Naines blanches
Magnitude absolue
-10 -5 0 +5 +10 +15
0.0 +0.5 +1.0 +1.5 +2.0
Couleur (B-V)
100 $M_\odot$
0.08 $M_\odot$
r powell
voir atunivers.free.fr

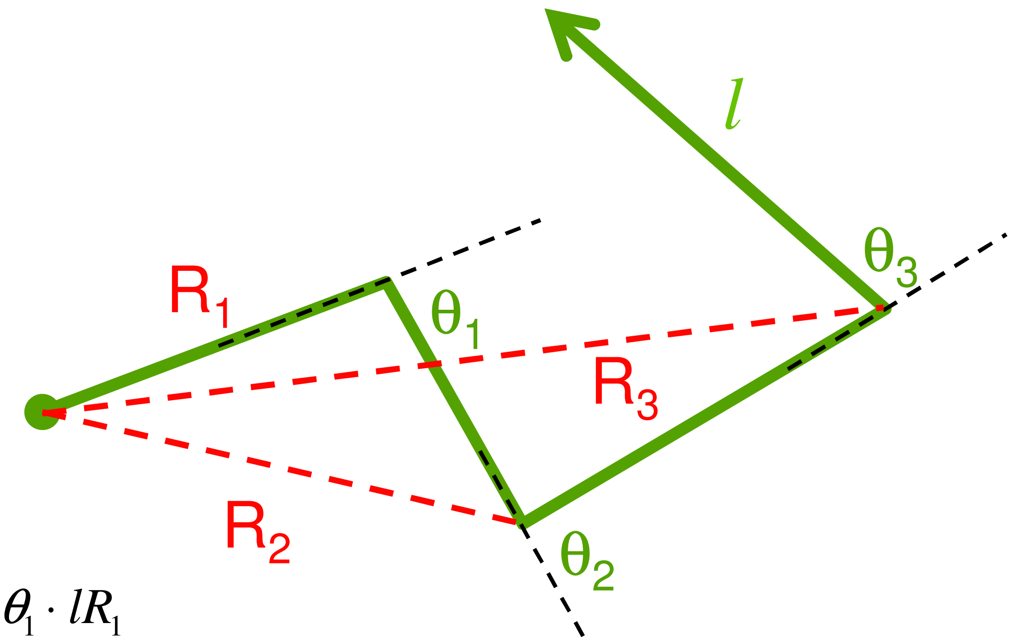
Relation masse-luminosité

(étoiles de la séquence principale)



Montrons que: $L \propto M^3$

Processus de marche au hasard



$$\begin{cases} R_1^{\,2} = l^2 \\ R_2^{\,2} = R_1^{\,2} + l^2 + 2\cos\theta_1 \cdot lR_1 \\ R_3^{\,2} = R_2^{\,2} + l^2 + 2\cos\theta_2 \cdot lR_2 \\ \vdots \\ R_N^{\,2} = R_{N-1}^{\;2} + l^2 + 2\cos\theta_{N-1} \cdot lR_{N-1} \end{cases}$$

où *l* est le libre parcours moyen des photons

Somme membre à membre:

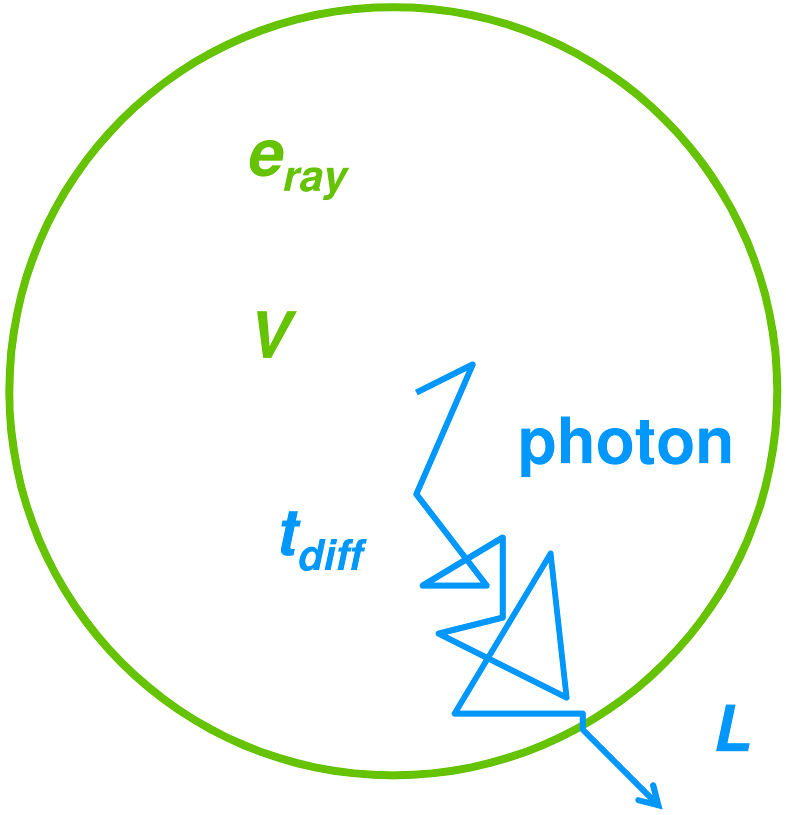
$$R_N{}^2 = Nl^2 + 2l\sum_{1}^{N-1}\cos\theta_i \cdot R_i$$

Marche au hasard: moyenne de cos θ_i nulle.

Donc en moyenne:

$$\boxed{R_N = \sqrt{N}\,l}$$

(général à tout processus de *diffusion*)



Energie de rayonnement: $E_{ray}=e_{ray}\times V$

Temps d'évacuation: t_{diff}

En régime stationnaire: $L = e_{ray}\times V / t_{diff}$

Or: $e_{ray} \propto T^4 \propto (M/R)^4$ (Stefan + viriel)

Que vaut t_{diff} ?

Distance moyenne parcourue: $R_N{}^2 = Nl^2$

Si R est le rayon de l'étoile, sortie après: $N = \dfrac{R^2}{l^2}$ pas

Temps du trajet: $t_{diff} = N\dfrac{l}{c} = \dfrac{R^2}{lc}$

Or: $l = \dfrac{1}{\sigma n} \propto \dfrac{1}{\rho} \propto \dfrac{R^3}{M}$

Donc: $\boxed{t_{diff} \propto \dfrac{R^2}{l} \propto \dfrac{M}{R}}$

Finalement: $$L \sim \frac{e_{ray} \cdot V}{t_{diff}} \propto \frac{M^4}{R^4} \times R^3 \times \frac{R}{M}$$

Relation masse luminosité séquence principale :

$$\boxed{L \propto M^3}$$

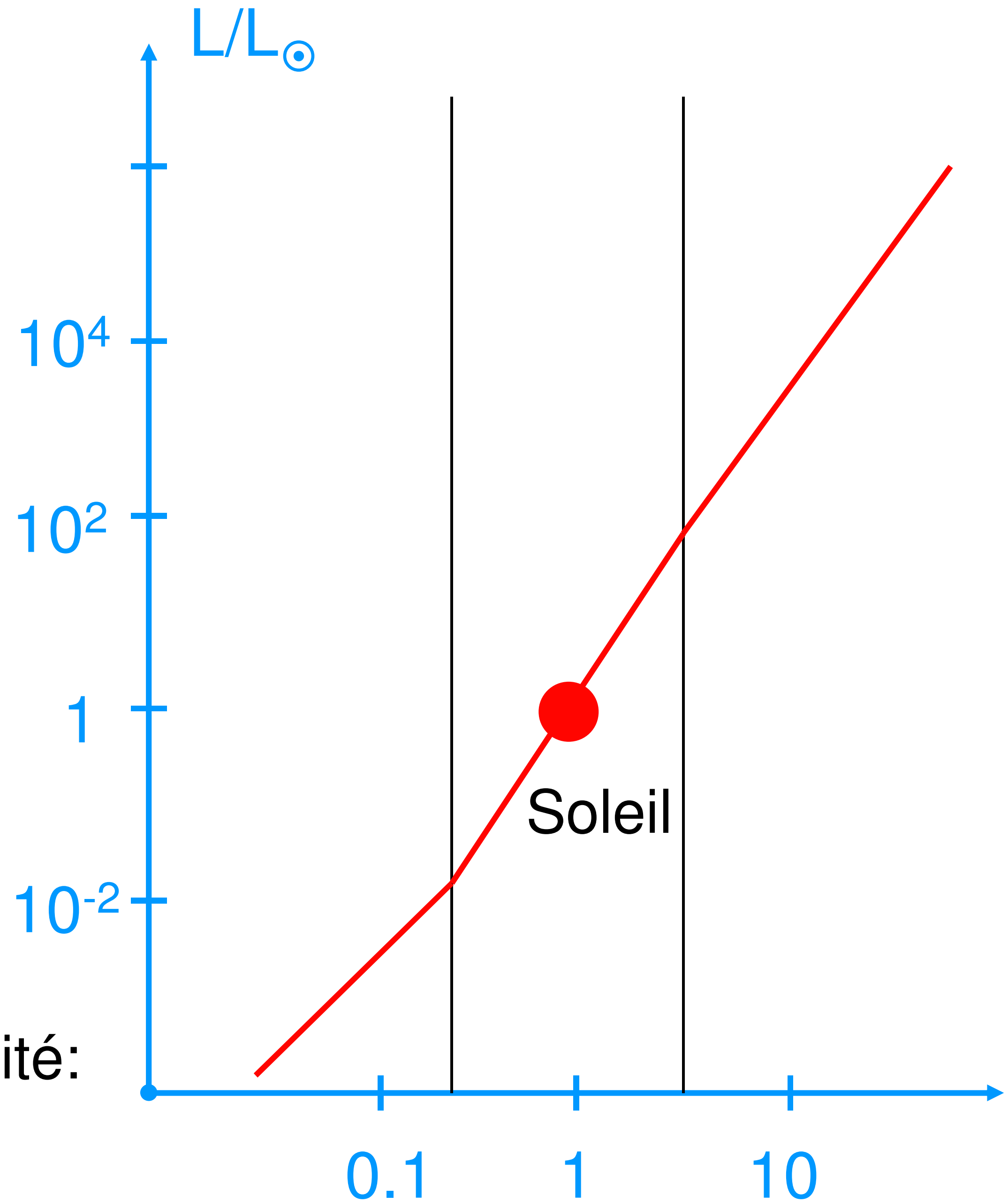
Durée de vie stellaire:

$$\boxed{t_{vie} \sim \frac{E_{nuc}}{L} \propto \frac{M}{M^3} = \frac{1}{M^2}}$$

Ex:

$M=40M_{\odot} \rightarrow t_{vie} \sim 10^{10}/40^2 \sim 6\times10^6$ ans (court!)

$M=0.08M_{\odot} \rightarrow t_{vie} \sim 10^{10}/(0.08)^2 \sim 1500\times10^9$ ans (long!)



Relation masse-luminosité:

$L \propto M^{\alpha}$ où $\alpha \sim 3$